

Investigation into the compatibility of stationarity of short-term interest rate proxies with the dynamic term structure models of interest rates

TaeHyung Kim* Jeongmin Park†

Abstract By building on the work of Conley et al. (1997), we investigate the stationarity of riskless short-term interest rate processes, analyzing generalized stochastic volatility models with level effects and examine the compatibility of stationarity of short-term interest rates with the popular dynamic term structure of models of interest rates, such as ATSM and QTSM. We extend extant stochastic volatility models with level effects crucial in characterizing the stationarity of a continuous time stochastic process, estimate the extended models using an efficient simulation-based MCML (Monte Carlo Maximum Likelihood) estimation method using importance sampling and implement model diagnostics using the inverse of standard normal distribution of the dynamic probability integral transform obtained via an auxiliary particle filter. Empirical estimation results indicate that TB3M and Call1d exhibit drift-induced stationarity compatible with both ATSM and QTSM, and that ED1M, KTB3M, MMF7d, CD91d and CP91d are of volatility-induced stationarity. Consequently, the results imply that, without careful consideration for the nature of stationarity of a short-term interest rate, indiscriminate application of theoretical models assuming the drift-induced stationarity of short-term interest rates may cause serious failure in derivative pricing and risk management.

Keywords Dynamic Term Structure Model of Interest Rates, Stochastic Volatility Model, Level Effect, Drift-induced Stationarity (DIS), Volatility-induced Stationarity (VIS), Monte Carlo Maximum Likelihood, Auxiliary Particle Filter (APF)

JEL Classification G12, E43, C11, C58

*Seoul National University

†Department of Business, Hanbat National University

무위험단기이자율 대용치의 안정성과 이자율기간구조모형과의 양립성 분석

김태형* 박정민†

Abstract 본 연구에서는 단기이자율 확률과정의 안정성의 특성을 규명하고 이를 통해 단기이자율의 동태적인 안정성의 특성이 기존 이자율기간구조모형의 가정과 부합하는지를 살펴보고자 한다. 단기이자율 확률과정 안정성에 대한 Conley et al. (1997)의 연구를 확장한 수준효과를 포함하는 일반적인 확률변동성모형을 이용하여 안정성을 특징짓는 수준효과 크기를 식별하고자 하였다. 기존 단기이자율 확률변동성모형의 한계를 극복하는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형 추정을 위해 효율적인 MCML추정법을 이용하였으며, 안정성을 특징짓는 수준효과 크기에 대한 통계적인 추론을 위해 보조파티클필터(auxiliary particle filter)를 통해 얻은 PIT(probability integral transform)를 표준정규분포로 역변환한 의사표준 예측오차를 이용한 모형 진단과 모형 적합성 비교를 하였다. 다양한 단기이자율 대용치들에 대한 실증분석 결과, 3개월 만기 미채무부채권 수익률과 한국의 익일물 콜금리는 ATSM 및 QTSM 등의 기존 이자율기간구조모형과 부합하는 ‘drift-induced stationarity’의 특성을 가지는 반면, 1개월 만기 유로달러 이자율, 한국의 잔존만기 3개월 국고채, MMF 7일물, 91일물 CD, 91일물 CP 수익률은 ‘volatility-induced stationarity’의 특성을 가지는 것으로 나타났다. 이와 같은 결과는 단기이자율 대용치의 안정성의 특성을 충분히 고려하지 않고 ‘drift-induced stationarity’를 가정하는 기존 이론모형을 이용하는 경우 파생상품가격결정과 리스크관리에 심각한 문제가 발생할 수 있음을 시사한다.

Keywords 이자율기간구조모형, 수준효과, 확률변동성모형, drift-induced stationarity(DIS), volatility-induced stationarity(VIS), 몬테카를로 최우추정(MCML), 보조파티클필터(APF)

JEL Classification G12, E43, C11, C58

*서울대학교

†한밭대학교 경상대학 경영회계학과. 주소: 대전광역시 유성구 동서대로 125 (우 305-791). 이메일 : jmpark@hanbat.ac.kr. 연락처: 042-821-1331.

1. 서론

무위험단기이자율은 채권, 금융파생상품, 실물파생상품 등의 자산가격결정, 그리고 포트폴리오 리스크관리와 같은 재무금융 뿐만 아니라 금융통화정책과 같은 거시금융정책 분야에서 핵심적인 역할을 하는 금융가격변수이다. 이러한 중요성으로 인하여 이론적인 측면에서 뿐만 아니라 실증분석적인 측면에서 무위험단기이자율의 동태적 특성(dynamic characteristics)을 규명하려는 수많은 연구가 이루어져 왔다. 그러나 무위험단기이자율을 실질적으로 관측할 수 없으므로 일반적으로 단기이자율에 관한 실증연구나 이를 이용한 자산가격결정 등에서 이에 대한 대용치(proxy)가 이용된다. 그러나 일반적으로 이용될 수 있는 바람직한 이자율을 선택하는 것이 용이하지 않다. 특정 단기이자율을 무위험단기이자율로 선택하는 것은 선택된 단기이자율의 동태적인 특성이 이자율기간구조의 단기측면(short end)에 반영됨을 의미한다. 따라서 무위험단기이자율의 대용치 선택은 이러한 이자율기간구조에 의해 결정되는 채권가격, 이자율관련 파생상품가격 그리고 채권포트폴리오의 리스크관리 성과 등에 영향을 줄 수 있다. 이러한 이유로 무위험단기이자율 또는 그 대용치의 동태적인 특성을 규명하기 위한 다양한 실증분석결과들이 제시된 바 있다. 그럼에도 불구하고 무위험단기이자율의 동태적인 특성과 함수형태에 대한 공통적인 결론은 제시되지 않고 있다.

이론적인 측면에서 무위험단기이자율의 동학은 균형 이자율기간구조 모형 또는 차익거래 이자율기간구조모형과 밀접한 관련이 있다. 그리고 무위험단기이자율은 이러한 이자율기간구조모형을 특징짓는 핵심적인 역할을 한다. 초기 균형모형인 Vasicek (1977), Cox, Ingersoll and Ross (1985, CIR)의 단일요인모형에서는 무위험단기이자율이 이자율기간구조를 결정하는 상태변수이다. 이 특징은 차익거래모형에도 동일하게 나타난다. 이러한 단일요인모형들은 SDE(stochastic difference equation)로 표현되는 무위험단기이자율 확률과정의 추세함수(drift function)의 평균회귀성향(mean reverting tendency)에 초점을 둔 모형이다. 또한 서로 다른 만기의 채권수익률이 하나의 요인에 의하여 결정된다는 가정은 모든 채권 수익률이 완전상관(perfect correlation)을 가지게 하므로 이자율기간구조의 형태에 실질적으로 제약을 부과하게 된다. 이러한 한계를 극복하기 위하여 Duffie and Kan (1996), Dai and Singleton (2000), Duffie (2002), 그리고 Cheridito et al. (2007) 등의 지수선형 이자율기간구조모형(exponential affine term structure model, 이하 ATSM)과 Ahn et al. (2002), Leippold and Wu (2002) 등의 지수이차 가우시

언모형(exponential quadratic gaussian term structure model, 이하 QTSM)과 같은 다요인모형들이 제시되었다. 이들 모형 역시 궁극적으로 평균회귀성향, 확률변동성(stochastic volatility), 비선형성(non-linearity) 등의 무위험단기이자율의 동태적인 특성을 중심으로 이자율기간구조를 설명하는 모형이다.

이자율기간구조모형을 특징짓는 무위험단기이자율의 동태적인 특성에 대한 기존 연구들은 연속시간모형과 이를 이산화한 이산시간모형을 중심으로 추세함수의 평균회귀성향의 선형성 또는 비선형성과 시변조건부분산(time-varying conditional variance)에 초점을 두고 있다. 특히 시변조건부분산에 대한 실증분석은 GARCH모형과 이산시간 확률변동성 모형을 중심으로 활발하게 이루어졌다. 이는 이산시간모형이 연속시간모형에 비해 상대적으로 추정이 용이하기 때문이다. 이를 위해 식별이 쉽지 않은 조건부분산의 수준효과(조건부분산이 이자율 수준에 의존하는 정도)의 크기를 고정시키거나 명시적 또는 암묵적으로 일정한 제약을 부과하였다. 그런데 이러한 수준효과 크기에 대한 제약은 궁극적으로 단기이자율과 이자율기간구조모형의 안정성의 성질에 대한 제약을 의미한다. 이러한 안정성에 대한 제약을 부과하면, ATSM 또는 QTSM과 같이 수학적으로 다루기 쉽고 해석적인(analytical) 해가 존재하는 기존 이자율 관련 이론모형들을 이용할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이자율들의 동태적인 특징을 포착하고자 하는 측면에서 이러한 사전적인 안정성의 성질에 대한 제약들이 모형의 2차 이상의 고차적률의 동태적 특성 설명력을 제약할 수 있다.

Conley et al. (1997)은 비선형추세함수와 CEV형태(constant-elasticity of variance form)의 확산함수를 가지는 단기이자율확률과정 분석에서 수준효과의 크기에 의해 안정성이 구분됨을 보였다. Conley et al. (1997)은 단기이자율 확률과정이 선형추세함수를 가지는 경우 수준효과의 크기가 1보다 작으면 'drift-induced stationary'이며 1보다 크면 'volatility-induced stationary'임을 보였다. 'drift-induced stationarity'는 평균회귀성향에 의해 확률과정이 안정성을 가짐을 의미한다. 이와 달리 'volatility-induced stationarity'는 추세함수의 평균회귀성향이 아니라 변동성에 의해서 확률과정이 안정성을 가짐을 의미한다. 앞서 언급한 바와 같이 단기이자율 확률변동성모형을 이용한 기존 분석에서는 이자율 확률과정의 안정성을 구분하는 수준효과의 크기를 0.5로 고정시키거나 1보다 작은 것으로 제약함으로써 사전적으로 'drift-induced stationarity'를 가정하였다. ATSM, QTSM의 이자율기간구조모형에서도 실질적으로 단기이자율 확률과정의 'drift-induced stationarity'를 가정하고 있다. ATSM과 QTSM은 변동성이 각각 CIR과정과 가우시언과

정의 2차형식이라는 점에는 차이가 있지만 기본적으로 다요인 확률변동성 모형이다. ATSM과 QTSM을 가장 크게 구분 짓는 것은 이자율 확률과정의 추세함수가 각각 선형과 비선형인 것과 확률변동성을 설명하기 위한 상태 변수의 상관관계에 대한 제약의 존재 유무이다. 하지만 ATSM, QTSM 또한 이자율 확률과정의 ‘drift-induced stationarity’를 가정하고 있으므로 이자율 확률과정의 조건부분산 설명력에 일정한 제약이 부과된 모형으로 볼 수 있다. 최근 ATSM이 이자율 기간구조의 조건부분산을 설명하는 데 충분하지 않다는 연구들이 제시되고 있다[Andersen and Benzoni (2010), Bikov and Chernov (2009, 2011), Collin-Dufresne and Goldstein (2002), Collin-Dufresne et al. (2009), Jacobs and Karoui (2009), Li and Zhao (2006), Jagannathan et al. (2003), Thomson (2008) 등].

Litterman and Scheinkman (1991)은 주성분분석(principal component analysis)을 통해 수준(level), 기울기(slope), 곡률(curvature)의 3요인으로 98%정도 이자율기간구조의 분산을 설명할 수 있으며 이 가운데 수준요인이 약 90%의 설명력을 가진다는 실증분석 결과를 제시한 바 있다. 수준요인은 실질적으로 단기이자율이거나 이와 밀접한 관련을 가진다. 그러므로 단기 이자율 대응치의 동태적인 특성을 분석함으로써 단기이자율 대응치를 포함하는 이자율기간구조모형이 설명하여야 할 이자율의 동태적인 안정성의 특성을 식별할 수 있다. 이를 통해 자산가격결정과 리스크관리에 ‘drift-induced stationarity’를 가정하는 기존 이자율기간구조모형의 적용 가능성 및 충분성을 살펴볼 수 있다.

본 연구에서는 Conley et al. (1997)의 단기이자율 확률과정의 안정성을 확장한 수준효과를 포함하는 일반적인 확률변동성모형 분석을 통해 단기 이자율 대응치로 흔히 이용되는 3개월 만기 미재무부채권수익률, 1개월 만기 유로달러이자율, 잔존만기 3개월 한국의 국고채수익률, 한국의 익일물 콜금리, 7일물 MMF수익률, 91일물 CD수익률, 91일물 CP수익률들의 확률과정의 동태적인 안정성의 특성을 규명하고 이를 통해 단기이자율의 동태적인 안정성의 특성이 기존 이자율기간구조모형의 가정과 부합되는지를 살펴보고자 한다. 이를 위해서는 단기이자율의 안정성을 구분하는 수준효과의 크기에 대한 식별과 효율적인 추정이 요구된다. 본 연구에서는 기존 단기이자율 확률변동성모형 분석의 한계를 극복하는 일반적인 단기 이자율 확률변동성모형들을 이용하여 안정성을 특징짓는 수준효과를 식별하고자 하였으며, 효율적인 몬테카를로 최우추정(Monte Carlo Maximum Likelihood, MCML)법을 이용하였다. 수준효과의 크기에 대한 정확한 통계적인 추론을 위해 보조파티클필터(auxiliary particle filter, APF)를 통해 얻

은 PIT(probability integral transform)를 표준정규분포역변환(inverse of standard normal distribution)한 의사표준예측오차(pseudo standardized prediction error)를 이용한 모형 진단과 IC(information criterion)를 이용한 모형 적합성 비교를 종합적으로 고려하였으며, 이를 통해 어떤 모형이 단기이자율의 동태적인 특성을 설명할 수 있는지를 살펴보았다. 분석 결과 3개월 만기 미채무부채권 수익률과 한국의 1일물 콜금리만이 ATSM과 QTSM같은 기존 이자율기간구조모형의 가정과 부합하는 ‘drift-induced stationarity’의 특성을 가지는 것으로 나타났다. 그러나 이들을 제외한 단기이자율 대응치들은 기존 이자율기간구조모형의 가정과는 다른 ‘volatility-induced stationarity’의 특성을 가지는 것으로 나타났다. 이와 같은 결과는 단기이자율 대응치의 안정성의 특성을 충분히 고려하지 않고 ‘drift-induced stationarity’를 가정하는 기존 이론모형을 이용하는 경우 파생상품가격결정과 리스크관리에 심각한 문제가 발생할 수 있음을 의미한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저 2장에서는 이자율의 조건부분산을 중심으로 이자율기간구조모형의 특성과 함께 단기이자율 확률과정의 안정성과 이자율기간구조모형의 안정성에 포함된 제약들에 대하여 살펴본다. 3장에서는 실증분석에 이용되는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 제시하고 시뮬레이션을 이용한 모형 추정과 진단 그리고 적합성 비교 방법을 논의한다. 그리고 4장에서는 3개월 만기 미채무부채권수익률, 1개월 만기 유로달러이자율, 우리나라의 1일물 콜금리, MMF 7일물 수익률, 91일 만기 CD수익률, 잔존만기 3개월 국고채수익률 등의 주간자료에 대한 실증분석결과를 제시한다. 마지막으로 5장에는 결론을 제시한다.

2. 이자율의 조건부분산을 중심으로 본 이자율기간구조모형의 특징과 안정성

본 절에서는 (단기)이자율의 조건부분산을 중심으로 균형 이자율기간구조모형의 특징을 살펴보고 이에 포함된 이자율 확률과정의 안정성을 간략하게 논의하기로 한다. Duffie and Kan (1996, 이하 DK), Dai and Singleton (2000, 이하 DS), Duffee (2002), Cheridito et al. (2007)에서 제시된 ATSM은 단기이자율의 평균회귀성향과 확률변동성의 특징을 반영하면서 해석적인 채권가격을 가지는 대표적인 모형이다. Ahn et al. (2002), Leippold and Wu (2002)의 QTSM은 (단기)이자율의 비선형평균회귀성향과 확률변

동성을 반영하는 모형으로 볼 수 있다¹. DK와 DS의 ATSM과 이를 확장한 Duffee (2002), Cheridito et al. (2007)의 ATSM은 위험의 시장가격에 영향을 미치는 미관측상태변수의 수와 위험의 시장가격의 함수형태에 따라 구분될 수 있다. 그러나 Ornstein-Uhlenbeck과정(이하 OU과정)과 CIR과정(Feller square root process)을 따르는 미관측상태변수의 선형결합으로 단기이자율을 설정하는 ATSM은 기본적으로 이들 상태변수 확률과정의 평균회귀성향과 확률변동성을 이용하여 이자율의 평균회귀성향과 확률변동성을 설명한다. 이와 달리 OU과정을 따르는 미관측상태변수의 2차형식(quadratic form)으로 단기이자율을 설정하는 QTSM은 상태변수의 2차형식을 통하여 단기이자율의 비선형평균회귀성향과 확률변동성을 설명하는 특징을 가지고 있다.

연속시간 단기이자율모형의 안정성은 평균회귀성향을 반영하는 추세 함수와 변동성을 특징짓는 확산함수에 의해 결정된다. Jones (2003a)는 Ait-Sahalia (1996a), Conley et al. (1997) 등의 연구를 바탕으로 단기이자율의 안정성을 특징짓는 조건을 제시하고, 이들 조건의 충족여부에 따라서 ‘drift-induced stationarity’와 ‘volatility-induced stationarity’로 단기이자율의 안정성을 구분하였다. 이러한 단기이자율의 안정성은 확률변동성모형으로 확장하는 경우에도 동일하게 적용될 수 있다[Jones (2003b), Durham (2003)].

2.1 지수선형모형

DK(1996)는 i) 단기이자율이 미관측상태변수의 선형함수이고, ii) 위험 중립 측도 하에서 미관측상태변수 확률과정의 추세함수와 조건부공분산 행렬이 상태변수의 선형함수라는 조건이 충족되는 경우, 잔존만기 τ 인 무이표채가격(zero coupon bond price)이 다음과 같은 미관측상태변수의 지수 선형함수라는 것을 보였다.

$$P(X_t, t, T) = \exp [A(\tau) + B(\tau)'X_t], \quad \tau = T - t \quad (2.1)$$

여기에서 $A(\tau)$ 는 스칼라, $B(\tau)$ 는 N 차원 벡터, X_t 는 차원 상태변수벡터이다. DS(2000)는 DK에서 제시된 모형을 일반화하여 ATSM의 표준형(canonical

¹DK (1996)가 ATSM이 확률변동성을 반영하는 모형이라는 점을 특별히 강조하고 있음에도 불구하고 ATSM과 QTSM이 단기이자율의 확률변동성을 반영하는 모형이라는 점이 간과되는 경향이 있다. Fong and Vasicek (1991), Longstaff and Schwartz (1992) 등과 같이 DK 연구 이전의 다요인 이자율기간구조모형들은 단기이자율과 그 확률변동성을 명시적인 상태변수로 포함하고 있다. DK의 ATSM은 이러한 모형들을 일반화한 것이다.

form), 상태변수의 식별조건(identification condition) 및 허용조건(admissibility condition)² 을 제시하였다.

DK와 DS의 ATSM이 식(2.1)의 채권가격을 가지기 위한 조건 i)과 ii)는 단기이자율과 상태변수의 확률과정이 각각 다음과 같이 설정됨을 의미한다.

$$r_t = \delta_0 + \delta'_X X_t \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} dX_t = K^Q (\Theta^Q - X_t) dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^Q \\ [S_t]_{ii} = \alpha_i + \beta'_i X_t \end{cases} \quad (2.3)$$

여기에서 δ_0 와 α_i 는 스칼라, δ_X , Θ^Q , β_i 는 각각 N 차원 벡터, K^Q 와 Σ 는 $(N \times N)$ 행렬, S_t 는 $[S_t]_{ii}$ 의 대각원소로 구성되는 $(N \times N)$ 대각행렬이며, W_t^Q 는 Q 축도 하의 차원 표준위너과정이다. 식(2.3)에서 X_t 의 확률과정은 안정적인 확률과정(stationary stochastic process)이므로, K^Q 에는 이러한 안정성을 충족시키기 위해 일정한 제약이 부과된다³. 식(2.3)에서 대각행렬 S_t 의 i 번째 원소를 구성하는 β_i 는 i 번째 상태변수의 조건부변동성에 영향을 주는 상태변수를 결정하는 역할을 한다. 식(2.1)~식(2.3)과 Feynman-Kac정리를 이용하면 다음과 같은 기초채권가격결정 PDE(partial differential equation)를 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial X'} \Sigma S_t \Sigma' \right] + \frac{\partial P}{\partial X'} [K^Q (\Theta^Q - X_t)] + \frac{\partial P}{\partial t} - [\delta_0 + \delta'_X X_t] = 0 \quad (2.4)$$

여기에서 $tr(\cdot)$ 은 행렬에 대한 트레이스 연산자(trace operator)를 나타낸다. $P(X_T, T, T) = 1$ 의 경계조건(boundary condition)을 결합하면 식(2.4)의 해를 구할 수 있다. DK와 DS의 ATSM에서 식(2.1)을 식(2.4)에 대입하면 무차익거래 제약조건을 충족하는 $A(\tau)$ 와 $B(\tau)$ 에 대한 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \Theta^{Q'} K^{Q'} B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \alpha_i - \delta_i = 0 \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} = K^{Q'} B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \beta_i - \delta_X \end{cases} \quad (2.5)$$

²허용조건은 확률변동성을 나타내는 상태변수가 양의 확률로 음의 값을 가지는 것을 방지하기 위한 조건이다.

³DS (2000)는 실질축도(physical measure)에서 상태변수의 안정성(stationarity)를 충족시키기 위하여 K 의 모든 고유값들(eigenvalues)이 0보다 커야 한다는 제약을 부과하고 있다. 그러나 최근의 연구에 따르면, 안정성을 위해서는 K 의 고유값이 복소수일 경우까지 포함하여 고유치의 실수부가 0보다 크다는 제약으로 완화시킬 수 있다.

$P(X_T, T, T) = 1$ 의 경계조건으로부터 얻어지는 $A(0) = 0, B(0) = 0$ 의 초기 조건(initial condition)을 이용하면 식(2.5)의 해를 구할 수 있다.

ATSM은 이자율기간구조의 (안정성을 포함한) 동태적인 특징이 식(2.3)의 상태변수의 동학에 의해 결정되는 특징을 가지고 있다. 확률변동성을 충분히 설명하기 위하여 확률변동성 상태변수의 수를 증가시킨 ATSM을 설정할 경우 허용조건에 의해서 상태변수들간의 상관관계가 항상 양이 되는 한계가 있다. 이로 인해 ATSM이 확률변동성을 적합·설명하는데 충분하지 않을 수 있다. Ahn et al. (2002), Leippold and Wu (2002)는 ATSM의 이러한 한계를 극복할 수 있는 모형으로 QTSM을 제시하였다. 그러나 Cheng and Scaillet (2007)은 QTSM이 실질적으로 상태변수의 상태공간을 확장한 제약하의 ATSM임을 보였다. 즉, N 요인 QTSM을 제약하의 $N + 0.5N(N + 1)$ 요인 ATSM으로 볼 수 있다.

2.2 단기이자율모형의 안정성

연속시간 단기이자율모형, 이자율기간구조모형 등은 다음과 같이 연속시간 확률미분방정식(stochastic differential equation, SDE)으로 표현된다.

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \quad (2.6)$$

여기에서 $\mu(\cdot)$ 와 $\sigma(\cdot)$ 은 각각 추세함수(drift function)과 확산함수(diffusion function)을 나타내며, W_t 는 스칼라 표준위너과정(standard Wiener process)을 나타낸다. 식(2.6)과 같은 확산과정이 해를 가지기 위해서는 일반적으로 다음과 같은 i) Lipschitz 조건(Lipschitz condition)과 ii) 선형증가 조건(Linear growth condition)을 충족하여야 한다.

$$\begin{cases} i) |\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|, & 0 < K < \infty, \forall x, y \in R \\ ii) |\mu(x)| + |\sigma(x)| \leq C(1 + |x|), & 0 < C < \infty, \forall x \in R \end{cases}$$

Lipschitz 조건은 해의 유일성을 보장하기 위한 조건이며, 선형증가 조건은 유한시간에 상태변수 X_t 가 발산하지 않도록 하는 조건이다(it does not explode in finite time). Lipschitz 조건을 다음과 같은 국지적 조건(local Lipschitz condition)으로 완화하는 경우에도 식(2.6)의 해는 존재한다. (Kloeden and Platen (1992), Øksendal (1998))

$$i') \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon \quad |\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C_\varepsilon |x - y|, \text{ for } 0 \leq x, y < \varepsilon$$

단기이자율을 포함한 이자율의 전형적인 특성 가운데 하나인 조건부 분산의 수준 의존 효과를 반영하기 위하여 확률과정의 확산함수는 일반적으로 다음과 같이 CEV 형태로 설정된다.

$$\sigma(X_t) = \sigma X_t^\gamma, \quad \gamma > 0 \quad (2.7)$$

식(2.6)의 SDE에서 추세함수가 0인 경우의 확률과정을 CEV과정이라 한다. 식 (2.7)의 CEV과정은 각각 $\gamma < 0.5$, $0.5 \leq \gamma < 1$, 그리고 $\gamma \geq 1$ 인 경우에 따라 서로 다른 특성을 가지는 해가 얻어질 수 있다[Feller (1951)]. 그런데 CEV과정은 SDE의 해가 존재하기 위한 국지적 Lipschitz 조건(Local Lipschitz condition)과 선형증가 조건(Linear growth condition)을 충족하지 않는다. CEV과정은 $0 < \gamma < 1$ 인 경우 국지적 Lipschitz 조건을 충족하지 않으며, $\gamma > 1$ 인 경우 선형증가 조건을 충족하지 않는다. 그럼에도 불구하고 Andersen and Andreasen (2000)은 CEV확률과정의 해가 존재하고 모든 해가 비폭발적임(nonexplosive)을 보였다. Andersen and Andreasen (2000)에 따르면, (i) $\gamma \geq 0.5$ 경우, CEV확률과정은 유일한 해를 가지며, (ii) $0 < \gamma < 1$ 인 경우, 확률과정이 양의 확률로 0의 값을 가질 수 있으며, (iii) $\gamma \geq 1$ 인 경우, 확률과정이 항상 양의 값을 가지며, (i) $0 < \gamma < 0.5$ 인 경우, $X = 0$ 인 경우에 대한 추가적인 경계조건이 부과되지 않으면 유일한 해를 가지지 않는다. 이와 같이 γ 의 크기에 따라 CEV과정의 동태적 특성과 해의 특성이 구분될 수 있다.

단기이자율의 비선형 평균회귀성향과 수준효과를 반영하기 위해 Conley et al. (1997)은 식(2.7)과 같은 CEV확산함수와 다음과 같은 일반적인 다항추세함수(polynomial drift function)를 가지는 확률과정을 분석하였다.

$$\mu(X_t; \alpha) = \sum_{i=-k}^l \alpha_i X_t^i \quad (2.8)$$

여기에서 $\alpha = [\alpha_{-k}, \alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_l]$ 이며, $k \geq 0$, $l \geq 1$ 이다. Conley et al.(1997)은 이와 같은 추세함수와 확산함수설정에서 X_t 의 확률과정이 안정성(stationarity)과 기하에르고딕성(geometric ergodicity)을 충족하기 위한 충분조건들(Conley et al. (1997)의 Assumption 1, 2, 4)과 충분조건들이 충족되기 위한 제약조건들을 제시하였다. Conley et al. (1997)에 따르면, 수준효과 파라미터 γ 의 크기에 의해서 확률과정의 특성이 결정된다. $\sigma(\cdot) = 0$ 일 때 폭발하는(explosive) 특성을 보일 수 있는 추세함수를 가지는 경우에도 $\gamma > 1$ 또는 $\gamma > 1.5$ 인 경우 단기이자율의 안정성이 충족된다. 즉, 확산함수의 변동을 통하여 확률과정이 안정적이게 된다. Conley et al. (1997)은 이와 같은

특성을 ‘volatility-induced stationarity(이하 VIS)’라 하였다. 그리고 $\gamma < 1$ 인 경우, 추세함수의 평균회귀성향에 의해 확률과정의 안정성이 결정되는데, 이를 ‘drift-induced stationarity(이하 DIS)’라고 하였다. 이를 통해 γ 의 크기에 따라 단기이자율 확률과정의 안정성의 특성이 달라짐을 알 수 있다.

Jones (2003a)는 Ait-Sahalia (1996a)에서와 같이 비선형추세함수와 CEV 형태의 확산함수를 가지는 다음과 같은 연속시간 단기이자율모형을 분석하였다.

$$dr_t = \left[\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 r_t^2 + \frac{\alpha_3}{r_t} \right] dt + \sigma r_t^\gamma dW_t \quad (2.9)$$

Conley et al.(1997)에서 제시된 안정성 조건을 적용하면, 다음과 같은 조건이 충족되는 경우 단기이자율확률과정은 안정적인 확률과정이 된다.

$$\begin{cases} \gamma < 1.5 & , & \alpha_2 < 0 & , & \alpha_3 > 0 & \dots\dots\dots (a) \\ or \\ \gamma > 1.5 & , & \alpha_3 > 0 & \dots\dots\dots (b) \end{cases} \quad (2.10)$$

조건 (a)가 충족되면 식(2.9)의 단기이자율 확률과정은 ‘drift-induced stationary’이며, 조건 (b)가 충족되면 ‘volatility-induced stationary’이다[Conley et al. (1997), Jones (2003b)]⁴. Jones (2003b)는 선형추세함수와 CEV 형태의 확산함수를 가지는 연속시간 확률과정의 해의 존재 조건, 유일성 조건, 안정성 조건, 그리고 1차 및 2차 적률 존재 조건을 제시하였다. Jones (2003b)에 따르면, 선형추세함수를 가지는 CEV확산과정이 ‘volatility-induced stationarity’를 가지기 위해서는 $\gamma > 1$ 의 조건이 충족되는 것만으로 충분하다. 또한 $\gamma > 1$ 의 조건하에서는 1차 적률만 존재하므로 2차 적률이 존재하기 위해서는 $\gamma > 1.5$ 의 조건이 충족되어야 한다. 따라서 식(2.10) (b)는 식(2.9)의 단기이자율 확률과정이 ‘volatility-induced stationary’이며 2차 적률이 존재할 조건이다⁵. 대부분의 기존연구에서 안정적이라고 할 때는 식(2.10) (a)의 DIS 조건이 충족됨을 의미한다. 선형추세함수를 가지는 단기이자율 확률과정이 DIS 조건을 충족하기 위해서는 $\gamma < 1$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 < 0$ 의 조건과 함께 양의 확률로 0의 값을 가지는 것을 방지하기 위한 추가적인 제약조건이 필요하다.

⁴Ait-Sahalia (1996a)는 (a)의 제약조건을 부과하였는데 이는 실질적으로 DIS 제약을 부과한 것이다. 왜냐하면 Ait-Sahalia (1996a)에서 파라미터 추정을 위해 단기이자율의 주변 확률밀도함수에 대한 비모수적 추정이 요구되는데, 이를 위해서는 반드시 자료의 안정성(stationarity)이 충족되어야 하기 때문이다.

⁵CEV확률과정의 ‘volatility-induced stationarity’에 관한 보다 자세한 논의는 Jones (2003b), Conely et al. (1997)을 참조하기 바란다.

살펴본 바와 같이 CEV형태의 확산함수를 가지는 확률과정의 동태적인 특성, 해, 적률의 존재를 결정하는데 핵심적인 역할을 하는 것은 수준효과 파라미터 γ 의 크기이다. Conley et al.(1997)과 식(2.10)의 추세함수 파라미터들에 대한 제약은 확률과정이 양의 확률로 0의 값을 가지거나 무한대로 발산하지 않도록 하는 역할을 한다. Conley et al. (1997)과 Jones (2003b)에서 제시된 안정성의 조건들의 충족 여부를 확인하기 위해서는 추세함수의 형태에 대한 추정이 필요하다. 그러나 추세함수의 형태가 중요한 의미를 가지는 경우는 DIS인 경우임에 주의할 필요가 있다. Conley et al.(1997)의 조건 (vii)⁶로부터 알 수 있듯이, VIS의 경우에는 추세함수의 형태에 실질적으로 제약이 부과되지 않는다. 앞서 살펴본 Andersen and Andreasen (2000)에서 제시된 해의 존재조건을 통해서도 제약이 부과되지 않음을 알 수 있다. 추세함수에 대한 제약이 중요한 경우는 DIS인 경우이다. Andersen and Andreasen (2000)에서 제시된 바와 같이 DIS인 경우 양의 확률로 0 또는 ∞ 가 될 수 있으므로 이를 방지할 조건이 필요하며, 해의 유일성을 확보하기 위해서도 부가적인 제약조건이 필요하다⁷. 이 때 추세함수에 부과되는 제약은 DIS 하에서 ‘boundary nonattainability’ 조건과 해의 유일성을 보장하는 역할을 한다. 따라서 추세함수에 대한 제약은 확률과정의 DIS 또는 VIS를 결정하는 역할을 하는 것이 아니라 γ 의 크기가 주어졌을 때 해의 유일성과 ‘boundary nonattainability’를 보장하는 역할을 한다. 선형추세함수와 CEV형태의 확산함수를 가지는 연속시간 확산과정에서 $\gamma > 1$ 인 경우 실질적으로 추세함수의 형태에 대한 제약조건은 해의 존재, 유일성, 그리고 안정적인 분포(stationary distribution)의 존재(integrability)와 무관하다 [Jones(2003b)].

이상에서 살펴본 단기이자율 확률과정의 안정성 조건으로부터 ATSM, QTSM 등의 기존 연속시간 이자율기간구조모형들이 단기이자율을 포함한 이자율의 추세함수 형태와 확산함수에 특정한 제약을 부과한 모형임을 알 수 있다. ATSM은 미관측상태변수의 확률과정이 Vasicek과정과 CIR과정의 결합으로 구성되므로 이들로부터 유도되는 단기이자율의 확률과정이 선형추세함수와 $\gamma = 0$ 또는 $\gamma = 0.5$ 로 고정된 CEV형태의 확산함수를 가정하는 모형임을 알 수 있다. QTSM은 ATSM과 달리 단기이자율이 OU 과정을 따르는 상태변수의 이차형식이므로 이를 쉽게 알 수 없다. 그러나 QTSM을 상태변수의 상태공간을 확장한 제약하의 ATSM으로 볼 수 있다.

⁶Conley et al. (1997)의 p.539에 제시된 제약조건이다.

⁷CIR확률과정에서 양의 확률로 음의 값을 가지는 것을 방지하는 Feller조건이 대표적인 부가 경계조건이다.

그러므로 QTSM 또한 ATSM과 마찬가지로 안정성을 충족하도록 이자율의 추세함수와 확산함수에 특정한 제약을 부과한 모형이다.

2.3 이자율기간구조모형의 안정성에 포함된 제약

이제 ATSM에서 단기이자율을 포함한 이자율 확률과정에 부과된 구체적인 제약들을 살펴보기로 한다. 무이표채권 가격과 수익률이 $P(t, \tau) = e^{-r_y(t, \tau)}$ 의 관계를 충족하므로 다음과 같이 잔존만기 τ 의 무이표채권 수익률을 쓸 수 있다.

$$y(t, \tau) = -\frac{1}{\tau} (A(\tau) + B(\tau)'X_t) \quad (2.11)$$

이를 이용하면, 다음과 같이 $K \gg N$ 인 K 개의 서로 다른 만기의 무이표채권 수익률을 쓸 수 있다.

$$Y_t = A + B'X_t \quad (2.12)$$

여기에서 $Y_t = [y(t, \tau_1), \dots, y(t, \tau_K)]'$, $A = -\frac{1}{\tau} [A(\tau_1), \dots, A(\tau_K)]'$, $B = -\frac{1}{\tau} [B(\tau_1), \dots, B(\tau_K)]'$ 이다. N 개의 상태변수를 가지는 표준적인 ATSM에서 행렬 B 의 위수는 N 으로 가정된다(full row rank). 즉 모든 상태변수들이 무이표채권 가격과 수익률에 영향을 주는 것으로 가정된다. 따라서 다음과 같이 관측된 무이표채권 수익률의 선형결합으로 상태변수 X_t 를 얻을 수 있다.

$$X_t = (BB')^{-1}B(Y_t - A) = C + (BB')^{-1}BY_t \quad (2.13)$$

식(2.13)는 관측된 무이표채권 수익률들의 선형결합으로 미관측상태변수를 구할 수 있음을 의미한다.

그리고 식(2.11)에 Itô's Lemma를 적용하면 다음과 같은 수익률 확률과정을 얻을 수 있다.

$$dy(t, \tau) = \mu_{y, \tau}(X_t, t)dt - \frac{1}{\tau} B(\tau)' \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^Q \quad (2.14)$$

여기에서 $\mu_{y, \tau}(\cdot)$ 은 추세항을 간략하게 표현한 것으로 상태변수 X_t 의 선형함수이다. 이로부터 다음과 같이 t 시점의 $y(t, \tau)$ 확률과정의 조건부분산을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{var}_t[y(t+h, \tau)] &= \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 B(\tau)' \text{var}_t(X_{t+h}) B(\tau) \\ &= \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 (B(\tau)' \otimes B(\tau)') \text{vec}[\text{var}_t(X_{t+h})] \end{aligned} \quad (2.15)$$

여기에서 $var_t(\cdot)$ 은 조건부분산을 나타내며, $h > 0$ 이다. 그런데 ATSM에서 상태변수 X_t 의 조건부분산은 상태변수의 선형함수이다. 그러므로 식(2.15)의 $y(t, \tau)$ 확률과정의 조건부분산이 상태변수의 선형함수임을 알 수 있다. 그리고 ATSM에서 식(2.13)의 관계가 성립하므로 다음과 같이 $y(t, \tau)$ 확률과정의 조건부분산을 나타낼 수 있다.

$$var_t [y(t+h, \tau) = a(\tau) + b(\tau)'Y_t] \quad (2.16)$$

여기에서 $a(\tau)$ 와 $b(\tau)$ 는 각각 스칼라와 K 차원 벡터를 나타낸다. 식(2.16)은 t 시점에 관측되는 무이표채권 수익률 벡터 Y_t 의 선형결합으로 $y(t, \tau)$ 확률과정의 조건부분산을 얻을 수 있음을 의미한다. 즉, 채권수익률 확률과정의 동태적인 특성을 채권수익률의 횡단면정보(cross-sectional information)를 이용하여 설명할 수 있음을 의미한다. 또한, 이자율 변동성 위험을 채권들로만 구성된 포트폴리오를 이용하여 제거할 수 있음을 의미한다. 식(2.13)과 함께 식(2.16)은 ATSM을 특징짓는 핵심적인 가정임과 동시에 ATSM에 부과된 매우 강한 제약조건이다. 그리고 이자율의 안정성 측면에서 식(2.13)와 식(2.16)은 ATSM이 모든 무이표채권 수익률의 DIS를 가정하는 모형임을 의미한다.

이상의 논의를 종합하면 ATSM과 QTSM이 DIS를 충족하도록 단기이자율의 수준효과 크기를 일정하게 고정시킨 모형임을 알 수 있다. 그리고 미관측상태변수를 포함하는 모든 ATSM모형은 단기금리가 상태변수 가운데 하나가 되는 모형으로 변환될 수 있다[Dai and Singleton (2000) 부록 E. 참조]. 일반적으로 이와 같은 변환을 통해서 $A_M N^8$ 의 ATSM을 단기이자율과 시변추세 또는 확률변동성 요인들을 상태변수로 가지는 모형으로 변환할 수 있다. 이를 통해 ATSM이 VIS를 가정하는 모형임을 쉽게 확인할 수 있다. 거시금융(macro finance)분야를 제외한 ATSM, QTSM의 다요인 모형을 이용한 재무분야의 실증분석에서는 대부분 적어도 하나 이상의 확률변동성 요인을 포함하는 모형의 적합성이 더 좋은 것으로 제시되고 있다⁹[Dai and Singleton (2000), Ahn et al. (2003), Hong and Li (2005), Collin-Dufresne et al. (2009), Trolle and Schwartz (2008) 등]. 이는 단기이자율을 상태변수로 하는 모형으로 변환했을 때, 단기이자율과 하나 이상의 확률변동성을 포함하는 이자율기간구조모형의 적합성이 더 좋음을 의미한다.

⁸ $A_M N$ 에서 N 은 전체 상태변수의 수를 나타내며, M 은 확률변동성을 포착하는 상태변수의 수를 나타낸다.

⁹이와 같은 기존 실증분석 결과들은 저자들이 복수의 확률변동성 성분을 포함하는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 제시하는 이유 가운데 하나이다.

최근 ATSM의 가정 또는 제약조건들에 대한 실증분석을 통해 ATSM이 현실의 이자율의 동태적인 특성들을 설명하는데 충분하지 않다는 다양한 연구결과들이 제시되고 있다. Andersen and Benzoni (2010), Bikov and Chernov (2009, 2011), Collin-Dufresne and Goldstein (2002), Collin-Dufresne et al. (2009), Jacobs and Karoui (2009), Li and Zhao (2006), Jagannathan et al. (2003), Thomson (2008) 등은 표준적인 ATSM에서 부과되는 식(2.16)에 대한 실증분석을 통해서 ATSM이 이자율 기간구조의 조건부분산을 적합하는데 충분하지 않다는 결과를 제시하고 있다. 특히 Collin-Dufresne and Goldstein (2002), Collin-Dufresne et al. (2009), Li and Zhao (2006) 등은 표준적인 ATSM에 일정한 제약을 가한 USV(unspanned stochastic volatility)모형¹⁰이 ATSM보다 이자율의 조건부분산을 잘 설명한다고 주장하였다. 최근 이러한 연구들에서 ATSM의 조건부분산 적합성이 검정·분석되는 이유는 조건부분산을 충분히 설명하지 못하는 경우, ATSM을 이자율 파생상품 결정이나 리스크관리에 활용하기 어렵기 때문이다. ATSM이 확률변동성을 설명하는데 충분하지 않다는 것은 Duffee (2002), Ahn et al. (2002), Jagannathan et al. (2003) 등에서 지적된 바 있다. 왜냐하면 확률변동성을 충분히 포착하기 위하여 확률변동성 상태변수의 수를 증가시키는 경우 단기이자율이 항상 양의 값을 가지기 위해 상태변수들 사이의 상관관계가 항상 양이라는 제약이 부과되기 때문이다. 표준적인 ATSM의 이러한 제약은 확률변동성에 대한 적합성을 제약할 뿐만 아니라 모형의 1차 적률에 대한 적합성 손실을 야기할 수 있다. ATSM이 이자율의 조건부분산을 설명하는데 충분하지 않음을 지적하는 대부분의 최근 연구들에서는 고빈도자료를 이용하여 구한 실현변동성(realized volatility), 파생상품가격으로부터 얻은 내재변동성(implied volatility), GARCH모형으로 추정된 조건부분산 등을 이자율기간구조의 횡단면정보로 설명할 수 있는지를 분석하고 있다¹¹. 또한 Bikov and Chernov (2009, 2011), Li and Zhao (2006), Jagannathan et al. (2003) 등은 ATSM의 조건부분산 설명력을 제고하기 위하여 무이표채

¹⁰USV는 식(2.16)이 충족되지 않으므로 i)채권만으로 변동성에 민감한 파생상품을 복제할 수 없거나, ii)무이표채권 가격 또는 수익률에 영향을 주지 않는 확률변동성 상태변수의 존재를 의미한다. 이 경우 ATSM에서 식(2.12)의 $(N \times K)$ 행렬 B 의 위수가 N 보다 작다. 이와 같이 USV모형은 표준적인 ATSM모형에 일정한 제약을 가하는 모형이다. 보다 자세한 논의는 Collin-Dufresne and Goldstein (2002), Collin-Dufresne et al. (2009)를 참조하기 바란다.

¹¹이들 연구에서 GARCH모형을 이용한 변동성 추정치를 이용하는 것은 GARCH모형이 확률변동성모형보다 조건부분산 적합성이 더 좋기 때문이 아니라 이들 연구에서 이용 가능한 표본의 크기가 확률변동성모형을 이용하기에 충분하지 않기 때문이라는 점에 주의할 필요가 있다.

권수익률 또는 스왑이자율과 함께 변동성에 민감한 캡스(caps)나 스왑션(swaption)을 함께 분석할 것을 제안하고 있다. Bikov and Chernov (2011)은 채권수익률만을 이용하는 경우, 변동성요인을 포함하는 ATSM과 그렇지 않은 ATSM의 조건부분산 적합성에 실질적으로 차이가 없다는 실증분석 결과를 제시하였다.

앞서 언급된 기존 연구들에서는 기본적으로 이자율기간구조모형에 부과된 DIS 제약조건을 주어진 것으로 가정하고 이자율기간구조모형의 조건부분산 적합성을 분석하고 있다. 이는 이들 분석에 이용된 자료들이 대부분 T-Bill을 중심으로 한 미국채 관련 이자율, LIBOR자료, 유로달러선물이자율이라는 점에 기인한다. 이들 자료 가운데 특히 T-Bill을 중심으로 한 미국채 관련 이자율의 경우, 수많은 실증분석을 통해서 추세함수의 평균회귀성향이 잘 알려진 자료이다. 그러나 이들을 제외한 이자율들의 평균회귀성향에 따른 안정성 여부는 알려져 있지 않다.

본 연구에서는 수준효과의 크기에 제약이 없는 일반적인 확률변동성모형을 이용하여 단기이자율 확률과정의 안정성의 특성을 규명하고 이를 통해 단기이자율의 안정성의 특성이 기존 이자율기간구조모형과 부합하는지를 살펴보고자 한다. 단기이자율 확률변동성을 중심으로 이자율기간구조모형의 조건부분산 적합성을 분석하는 접근법은 Collin-Dufresne et al. (2009)의 연구에서도 이용된 바 있다.

3. 실증분석 모형

3.1 기존 모형의 특징

단기이자율 확률변동성모형에 대한 기존 실증연구에서 단기이자율의 변동성집중, 지속성, 수준효과 그리고 점프(jump)와 같은 불규칙적인 변동성의 특징을 설명하기 위한 다양한 노력이 시도되었다[Ball and Torous (1999), Smith (2002), Kalimipalli and Susmel (2004), Sun (2005) 등]. 그러나 기존모형들은 기본적으로 로그확률변동성 방정식을 AR(1)과정으로 한정하는 연속시간모형을 이산화한 모형으로서의 특징과 확률변동성 성분의 수를 하나 또는 둘로 한정하거나 관측방정식과 상태방정식의 교란항들 사이의 상관관계를 허용하지 않는 제약적인 모형설정을 가지고 있다. 이러한 제약적인 모형들이 주로 이용된 이유는 단기이자율 확률변동성모형이 미관측상태변수를 포함하는 비선형비정규상태공간모형(non-linear non-gaussian state space model)이므로 모형을 확장하는 경우 추정이 쉽지 않기 때문이다. 또한, 추정이 쉽지 않은 수준효과 파라미터의 크기에 명시적 또

는 암묵적으로 일정한 제약을 부과함으로써 DIS를 가정한 특징을 가지고 있다¹².

3.2 실증분석 모형

본 연구에서는 기존 모형들의 한계점들을 극복할 수 있는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 이용하여 단기이자율의 동태적인 특성을 살펴보고자 한다. 이를 위해 단기이자율의 안정성을 특징짓는 수준효과 파라미터의 크기에 제약을 부과하지 않는 모형을 기준모형으로 하여 두 방향으로 기존 단기이자율 확률변동성모형을 확장한다.¹³

먼저, 기존연구에서 로그확률변동성을 AR(1)과정으로 한정된 것을 완화하여 AR(p)모형으로 확장할 수 있다. 이는 변동성의 지속성을 설명할 수 있는 일반적인 모형설정이다.

$$\begin{cases} y_t = \sigma r_t^\gamma \exp\left(\frac{1}{2}h_t\right) \varepsilon_t \\ h_{t+1} = \phi_1 h_t + \phi_2 h_{t-1} + \dots + \phi_p h_{t+1-p} + \eta_t \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right] \end{cases} \quad (3.1)$$

여기에서는 ARMA(p,q)필터 등을 이용하여 평균과 계열상관을 제거한 단기이자율을 나타내며, 는 비조건부평균변동성(unconditional mean of volatility)을 나타낸다. 식(3.1)은 기존 실증연구에서 제기된 하나의 확률변동성 요인만으로 변동성 장기기억의 특성을 설명하기에 충분하지 않다는 결과들을 반영한 모형설정이다. 연속시간모형에서 확률변동성의 장기기억의 특징을 설명하기 위해서는 이산시간모형에서와 같이 확률과정의 차수를 증가시키는 것이 불가능하기 때문에 추가적인 확률과정의 도입이 불가피

¹²수준효과의 크기를 명시적 또는 암묵적으로 제약하는 모형들이 주로 이용된 이유는 ATSM과 ATSM모형으로 분류되는 CIR, Fong and Vasicek모형 등의 명시적인 상태변수를 가지는 이자율기간구조모형, QTSM, Ahn and Gao (1999) 등의 이자율기간구조모형과 기존의 이론적인 단기이자율모형들이 대부분 수준효과를 특정한 크기로 고정한 모형으로 제시된 것에 주로 기인한다. 이는 일반적으로 단기이자율의 수준효과의 크기를 일정한 크기로 제약하지 않는 경우 닫힌 형태(closed form)의 자산가격이나 해를 얻을 수 없거나 다룰 수 없는(intractable) 경우가 대부분이기 때문이다. 또한 실증분석 측면에서 수준효과 파라미터의 크기를 제약하지 않는 경우 확률변동성에 포함된 파라미터와 수준효과 파라미터를 식별하기 어려운 식별문제를 해결할 수 있는 제약 역할을 한 측면도 있다.

¹³본 논문의 모형은 Asai (2008)의 확률변동성모형을 수준효과를 포함하는 단기이자율 확률변동성모형으로 확장한 것이다.

하다. 하지만 이산시간모형에서는 장기기억의 특징을 포착하기 위해서 미관측상태변수의 시차를 증가시키는 것이 가능하다는 장점이 있다. 이러한 이산시간모형의 특징은 연속시간모형에 비해 모형의 적합성을 개선시킬 수 있는 장점이 된다[Monfort and Pegoraro (2006, 2007), Bertholon et al. (2008)]. Harvey and Shephard (1996)에서와 같이 식(3.1)의 관측방정식을 제공하는 다음 로그를 취하여 식(3.1)을 다음과 같은 선형 비정규 상태공간모형(linear non-gaussian state space model)으로 변환할 수 있다.

$$\begin{cases} \ln y_t^2 = \ln \sigma^2 + 2\gamma \ln r_{t-1} + Z\alpha_t + \zeta_t \\ \alpha_{t+1} = d_t + \Phi\alpha_t + R\eta_t^* \quad , \quad \eta_t^* \sim N(0, \sigma_\eta^2 - \mu^{*2}) \quad , E[\zeta_t \eta_t^*] = \gamma^* s_t \end{cases} \quad (3.2)$$

여기에서 $\zeta_t = \ln \varepsilon_t^2$, $\mu = \rho \sigma_\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\gamma^* = 1.1061 \rho \sigma_\eta$ 이며, $s_t = \text{sign}(y_t)$ 로 $y_t > 0$ 이면 1, $y_t < 0$ 이면 -1의 값을 가지는 부호정보를 나타낸다. 그리고 Z , α_t , d_t , Φ , R 은 각각 다음과 같다.

$$Z' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{p \times 1} \quad \alpha_t = \underbrace{\begin{pmatrix} h_t \\ h_{t-1} \\ \vdots \\ h_{t+1-p} \end{pmatrix}}_{p \times 1} \quad d_t = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu^* s_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{p \times 1} \quad \Phi = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{p \times p} \quad R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{p \times 1}$$

논의의 편의를 위하여 식(3.1) 또는 식(3.2)를 SV-AR(p)모형이라 부르기로 한다. 대부분의 확률변동성모형 추정에서는 Harvey and Shephard (1996)와 같이 ζ_t 를 정규분포로 근사한 후, 칼만필터를 이용한 QML추정을 하였다. 그러나 본 연구에서는 Durbin and Koopman (1997), Sandmann and Koopman (1998), Asai and McAller (2005), Asai (2008) 등에서와 같이 중요표본추출법(importance sampling)을 이용한 효율적인 최우추정법으로 식(3.2)의 모형을 추정하였다.

다음으로, 기존의 실증연구에서 변동성 성분의 수가 하나 또는 둘 정도로 제한된 모형들이 이용된 점을 완화하여, 다음과 같이 K 개의 변동성 성분을 가지는 일반적인 확률변동성모형을 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} y_t = \sigma_{t-1}^\gamma \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K h_{it}\right) \xi_t, \quad \xi_t = \sum_{i=0}^K \rho_i \varepsilon_{it}, \quad \rho_0 = \sqrt{1 - \rho_1^2 - \cdots - \rho_K^2} \\ h_{it+1} = \psi_i h_{it} + \sigma_{\varepsilon_i} \varepsilon_{it}, \quad \text{for } i = 1, \dots, K \\ \{\varepsilon_{it} \sim i.i.dN(0, 1)\}_{i=0, \dots, K} \end{cases} \quad (3.3)$$

여기에서 $\rho_0 = \sqrt{1 - \rho_1^2 - \dots - \rho_K^2}$ 는 관측방정식의 교란항(ξ_t)이 표준정규 분포가 되도록 하는 식별제약이다. 식(3.3)의 K 요인 확률변동성모형은 $corr(\xi_t, \varepsilon_{it}) = \rho_i$ 인 일반적인 모형임을 알 수 있다. 식(3.2)의 모형변환에서와 같이 식(3.3)의 관측방정식을 제공한 다음 로그를 취하여 식(3.3)을 다음과 같은 비정규선형상태공간모형으로 변환할 수 있다.

$$\begin{cases} \ln y_t^2 = \ln \sigma^2 + 2\gamma \ln r_{t-1} + Z^+ \alpha_t + \zeta_t^+ \\ \alpha_{t+1} = d_t^+ + \Phi^+ \alpha_t + \eta_t^{*+}, \quad \eta_t^{*+} \sim N(0, Q), \quad E(\eta_t^{*+} \eta_t^+) = G_t \end{cases} \quad (3.4)$$

여기에서 $\zeta_t^+ = \ln \xi_t^2$ 이며, Z^+ 는 모든 원소가 1인 ($1 \times K$) 행렬이다. 그리고 d_t^+, Φ^+, Q, G_t 는 각각 다음과 같다.

$$d_t^+ = 0.7979s_t \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_1 \sigma_{\varepsilon_1} \\ \rho_2 \sigma_{\varepsilon_2} \\ \vdots \\ \rho_K \sigma_{\varepsilon_K} \end{pmatrix}}_{K \times 1} \quad G_t = 1.1061s_t \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_1 \sigma_{\varepsilon_1} \\ \rho_2 \sigma_{\varepsilon_2} \\ \vdots \\ \rho_K \sigma_{\varepsilon_K} \end{pmatrix}}_{K \times 1} \quad Q = \underbrace{diag \begin{pmatrix} \sigma_{\eta_1^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho_1^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{\eta_K^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho_K^2 \sigma_{\varepsilon_K}^2 \end{pmatrix}}_{K \times K}$$

여기서 $s_t = sign(y_t)$ 이며, $diag(a_1, \dots, a_K)$ 는 a_1, \dots, a_K 를 대각원소로 가지는 대각행렬을 나타낸다. 식(3.3) 모형의 추정과 마찬가지로 MCML추정법을 이용하여 식(3.4)의 모형을 추정할 수 있다. 식(3.4)에서 미관측상태변수인 로그확률변동성을 식별하기 위하여 지속성 파라미터에 $1 > \psi_1 \geq \psi_2 \geq \psi_3 > -1$ 의 식별제약을 부과하는 것이 필요하다. 이러한 식별제약을 부과하면, 첫 번째 확률변동성을 지속성이 가장 큰 장기변동성, 두 번째와 세 번째는 중기 및 일시적인 단기변동성으로 해석할 수 있다.

식(3.3) 또는 식(3.4)와 같은 다요인확률변동성모형(multi-factor stochastic volatility model, 이하MFSV모형)은 Gallant et al. (1999)과 Chernov et al. (2003)의 연속시간 2요인 확률변동성모형을 보다 일반화한 이산시간 확률변동성모형이라 할 수 있다. 2요인 확률변동성모형에서 두 번째 확률변동성 성분의 지속성 파라미터가 0이 되는 경우, 두 번째 확률변동성 성분이 자산수익률의 분포가 두꺼운 꼬리를 가지는 특징을 설명하는 역할을 할 수 있다[Chernov et al. (2003)]. 이러한 다요인모형의 특징은 식(3.3) 또는 식(3.4)의 MFSV모형에도 동일하게 적용될 수 있다. 다요인모형으로 단기이자율 분포의 특징을 설명하고자 하는 것은 자산수익률에 점프를 도입하여 수익률의 동학을 설명하려는 모형들과 유사하다. 또한, 식(3.3)과 같이 복수의 확률변동성을 도입하는 경우 확률변동성의 장기기억(long memory)과 같은 특징을 설명할 수 있다. Granger and Morris (1976)는 각각 독립적인

AR(p_1)과정과 AR(p_2)과정의 합을 ARMA(p, q)과정으로 나타낼 수 있음을 보였다. 이때 $p \leq p_1 + p_2$, $q = \max(p_1, p_2)$ 이다. 이러한 특성을 고려하면, 식(3.3)이 식(3.1)보다 확률변동성의 지속성을 잘 포착할 수 있는 일반적인 모형임을 알 수 있다. 그리고 확률변동성모형에서 뿐만 아니라 기존 이자율기간구조모형에 대한 실증분석에서도 대부분 하나 이상의 확률변동성 요인을 가지는 모형의 적합성이 더 좋은 것으로 제시되고 있다.

식(3.1)과 식(3.3)에서와 같은 일반적인 확률변동성모형의 경우, 수준효과 파라미터와 로그확률변동성방정식에 포함된 파라미터들에 대한 식별문제(identification problem)가 발생할 수 있다. Ball and Torous (1999)는 이러한 파라미터 식별문제를 해결하는 방법으로 기하평균(geometric mean)을 이용하여 분석자료를 스케일조정하는 방법을 제시하였다. 이러한 스케일조정은 첨도와 왜도 등과 같은 분포의 특성을 변화시키지 않으면서 수준효과 파라미터와 로그확률변동성방정식에 포함된 파라미터의 식별을 용이하게 하는 장점이 있다. 본 연구에서는 Ball and Torous (1999)의 기하평균을 이용한 스케일조정으로 파라미터 식별문제를 해결하고자 하였다¹⁴. 그리고 식(3.2)와 식(3.4)의 모형들은 모두 y_t^2 에 로그를 취하여 선형상태공간모형으로 변환된 모형이다. 로그를 취하는 과정에서 y_t 의 값이 0이거나 0에 가까운 값을 가지는 경우 ‘inlier problem’이 발생할 수 있다. 이를 해결하기 위해 Bredit and Carriquiry (1996)에서 제시된 변환을 이용하였다.

3.3 모형 추정, 진단 및 적합성 비교

3.3.1 모형 추정법

Shephard and Pitt (1997), Durbin and Koopman (1997, 2000)은 일반적인 비선형비정규상태공간모형을 추정하기 위하여 관측치($\mathbf{y} = \{y_t\}_{t=1}^n$)와 미관측상태변수($\alpha = \{\alpha_t\}_{t=1}^n$)의 결합확률밀도함수를 국지적으로 근사하는 방법을 제시하였다. 이들은 근사적인 선형정규상태공간모형(locally approximating linear gaussian state space model)으로부터 미관측상태변수의 표본을 추출하여 비선형비정규상태공간모형의 우도함수를 근사하는 방법을 제안하였다. Sandmann and Koopman (1998)은 Durbin and Koopman (1997,

¹⁴ 단일요인 확률변동성모형의 경우에는 파라미터 식별문제가 심각하게 발생하지 않았음을 밝혀둔다. 단일요인 확률변동성모형의 경우, 기하평균을 이용하여 스케일 조정된 자료와 조정하지 않은 자료에 대한 추정결과가 거의 동일한 것으로 나타났다. 그러나 다요인모형의 경우에는 상이한 것으로 추정되는 경우가 발견되었다. 따라서 이후 본 논문에서 제시되는 추정결과는 스케일 조정된 자료에 대한 분석결과이다.

2000)과 유사하게 식(3.2) 및 식(3.4)와 같은 선형비정규상태공간모형의 y 와 α 의 결합확률밀도함수를 근사하는 선형정규상태공간모형의 상태변수 또는 관측방정식의 교란항을 표본추출하여 선형비정규상태공간모형의 우도함수를 근사하는 방법을 제안하였다. Durbin and Koopman(1997, 2000)에서는 추정하고자 하는 모형의 로그우도함수와 근사적인 선형정규상태공간모형 로그우도함수의 1계 및 2계 도함수를 일치시키는 방법으로 근사적인 선형정규상태공간모형을 찾는다. 이와 달리 Sandmann and Koopman(1998)에서는 추정모형의 로그우도함수와 근사모형의 로그우도함수의 1계 도함수를 일치시키는 방법으로 근사적인 선형정규상태공간모형을 찾는다.

본 연구에서는 Sandmann and Koopman(1998)의 방법으로 비정규상태공간모형에 대한 근사모형을 선택하였다¹⁵. 이를 위해 다음과 같은 자유도 1의 로그카이제곱분포를 따르는 식(3.2) 또는 식(3.4)의 관측방정식의 교란항 ζ_t 또는 ζ_t^+ 의 확률밀도함수가 이용된다.

$$p_{\ln\chi^2}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{\zeta - e^{-\zeta}}{2}\right] \quad (3.5)$$

그리고 근사적인 선형정규상태공간모형에서 관측방정식의 교란항은 $N(0, H_t)$ 의 정규분포를 따르는 것으로 가정된다. 근사모형을 이용하여 추정하고자 하는 모형의 우도함수를 근사하고자 할 때, 근사모형의 상태변수를 표본추출하는 것보다 근사모형의 관측방정식의 교란항을 표본추출하여 참모형의 우도함수를 근사하는 것이 더 효율적이다. 관측방정식의 교란항을 표본추출하기 위해서는 먼저 근사적인 선형정규상태공간모형을 찾는 것이 필요하다. 이를 위해서 관측방정식의 교란항 ζ_t 의 사후조건부평균, 즉 평활교란항(smoothed disturbance), $\hat{\zeta}_t = E[\zeta_t | Y_n, \psi]$ 이 이용된다. 그리고 평활교란항 $\hat{\zeta}_t$ 이 얻어지면 참모형과 근사모형의 로그우도함수의 1계 도함수를

¹⁵Sandmann and Koopman (1998)(이하 SK)에서도 관측방정식과 상태방정식 교란항의 상관관계를 허용하는 확률변동성모형에 대한 MCML추정법이 제시되었다. 그러나 SK에서 제시된 모형은 관측치와 로그변동성이 마팅게일 성질을 충족하는 결합마르코프과정(joint Markov process)이 아니므로 관측치와 로그변동성이 결합마르코프과정인 본 논문의 확률변동성모형과는 다소 다른 모형이다. 따라서 SK에서 제시된 알고리즘을 본 연구의 모형에 동일하게 적용할 수는 없다. Yu (2005)는 이산시간 확률변동성모형에서 관측치와 로그변동성의 결합마르코프과정에 대한 자세한 논의를 하고 있다. 2000년대 중반까지의 기존 실증분석에서는 이를 명시적으로 고려하지 않은 경향이 있었다.

일치시키는 방법으로 근사모형의 분산 H_t 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H_t = \frac{2\hat{\zeta}_t}{\exp(\hat{\zeta}_t) - 1} \quad (3.6)$$

이와 같은 방법으로 근사모형을 찾기 위해서는 반복적인 갱신과정이 필요하다. 이러한 갱신과정에서 모형의 파라미터는 고정된 것으로 가정된다. 먼저 QML추정에서와 같이 관측방정식의 교란항이 $\zeta_t \sim N(0, H_t^{(0)} = \pi^2/2)$ 를 따르는 것으로 가정되는 모형에 칼만필터와 Koopman (1993)의 ‘disturbance smoother’를 적용하여 초기 평활교란항 $\{\hat{\zeta}_t^{(0)}\}_{t=1}^n$ 을 구한 다음, 이를 식(3.6)에 대입하여 근사모형의 $\{H_t^{(1)}\}_{t=1}^n$ 를 갱신한다. 이렇게 얻은 $\{H_t^{(1)}\}_{t=1}^n$ 를 주어진 것으로 보고 근사모형에 다시 칼만필터와 ‘disturbance smoother’를 적용하여 평활교란항 $\{\hat{\zeta}_t^{(1)}\}_{t=1}^n$ 을 갱신하는 과정과 이를 식(3.6)에 대입하여 $\{H_t^{(2)}\}_{t=1}^n$ 를 갱신하는 과정을 반복하는 방법으로 근사모형을 찾을 수 있다. 일반적으로 이와 같은 근사모형 탐색과정에서 10회 15회 미만의 반복과정이 소요된다.

위와 같은 방법으로 식(3.2) (또는 식(3.4))의 모형에 대한 정규분포근사모형을 찾기 위해서는 다음과 같은 관측방정식의 교란항 ζ_t (또는 ζ_t^+)와 상태방정식의 교란항 η_t^* (또는 η_t^{*+})의 공분산행렬 Ω_t (또는 Ω_t^+)가 항상 양정부호(positive definite)라는 조건이 충족되어야 한다.

$$\Omega_t = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 - \mu^{*2} & \gamma^* s_t \\ \gamma^* s_t & H_t \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad \left(\Omega_t^+ = \begin{pmatrix} Q & G_t \\ G_t' & H_t \end{pmatrix} \right) \quad (3.7)$$

($\rho = 0$ 또는 $\{\rho_i\}_{i=1}^K$)인 경우 식(3.7)의 공분산행렬의 양정부호조건이 항상 충족되므로 문제가 되지 않는다. 그러나 식(3.2) 또는 식(3.4)와 같은 일반적인 모형에서 식(3.7)의 공분산행렬의 양정부호조건이 충족되지 않을 경우 근사적인 선형정규상태공간모형을 탐색하는 식(3.6)의 반복과정에 문제가 발생한다. Asai and McAleer (2005), Asai (2008)는 공분산행렬이 양정부호조건을 충족하지 않는 경우, Higham (1988)의 ‘nearest covariance matrix in the Frobenius norm’을 이용할 것을 제안하였다¹⁶. 이 방법은 일반적인 실대칭행렬(real symmetric matrix) C 의 ‘symmetric polar factor’ P 를 이용하여

¹⁶본 연구에서는 Higham (2008)의 9장에 제시된 ‘polar decomposition’ 알고리즘을 이용하였다.

$C^* = 0.5(C+P)$ 로 변환하는 방법으로 C^* 가 항상 양정부호조건을 충족하도록 한다. 이러한 변환은 시뮬레이션을 이용한 최적화 과정에서 일시적으로 식(3.7)의 공분산행렬이 양정부호조건을 충족하지 않는 경우에 이용될 수 있다. 본 연구의 추정과정(초기 최적화과정)에서 약3회 7회 정도 이용되었다.

단일요인모형의 경우 Sandmann and Koopman (1998)과 Asai (2008)에 서와 같이 10개 50개의 표본경로를 생성하여 안정적인 추정결과를 얻을 수 있었다. 그러나 식(3.4)와 같은 다요인모형의 경우에는 관측된 자료로부터 미관측상태변수인 로그확률변동성을 식별하는 것이 용이하지 않을 수 있으므로 미관측상태변수의 표본경로의 수를 증가시키는 것이 필요하다. 모형추정의 안정성과 효율성을 확보하기 위하여 모든 모형 추정에 총 200개의 표본경로와 함께 Durbin and Koopman (1997, 2000)과 Sandmann and Koopman (1998)에서 제시된 대조변수(antithetic variable) 표본추출법을 이용하였다. 이 경우 실질적으로 800개의 표본경로를 생성하여 모형을 추정하는 것이 된다.

3.3.2 모형 진단

식(3.2)와 식(3.4)의 확률변동성모형 진단을 위해 1기간 예측오차(one-step ahead prediction error)가 필요하다. 그러나 일반적으로 식(3.1)과 식(3.3)과 같이 미관측상태변수를 포함하는 비정규상태공간모형의 1기간 예측오차를 구하는 것이 쉽지 않다. 본 연구에서는 Gerlach et al. (1999)에서와 같이 1기간 예측확률을 구하고 이를 모형진단에 이용하였다.

Gerlach et al. (1999)은 다음과 같이 필터링을 이용하여 모형의 1기간 예측확률을 구하는 방법을 제시하였다. 진단 또는 적합성을 평가하고자 하는 모형의 가정이 충족된다는 귀무가설 하에 다음과 같이 정의되는 관측치의 1기간 예측확률 u_t 는 $[0, 1]$ 구간의 값을 가지는 독립적이고 동일한 일량분포(i.i.d. uniform distribution)를 따른다[Rosenblatt (1952)].

$$\begin{cases} p(y_t, \mathbf{Y}_{t-1}) = \int p(y_t | \alpha_t, \mathbf{Y}_{t-1}) p(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}) d\alpha_t \\ u_t = Pr[Y_t \leq y_t | \mathbf{Y}_{t-1}] = \int_{-\infty}^{y_t} p(y | \mathbf{Y}_{t-1}) dy \end{cases} \quad (3.8)$$

여기에서 Y_t 는 관측치에 해당하는 확률변수, y_t 는 t 기의 관측치, α_t 는 미관측상태변수 그리고 \mathbf{Y}_{t-1} 은 $t-1$ 기까지의 관측치인 $\{y_{t-1}, \dots, y_1\}$ 를 나타낸다. 식 (3.8)의 두 번째 식과 같은 방법으로 1기간 예측확률을 구하는 방법을 PIT라고 한다. Diebold et al. (1998)은 1기간 예측확률 u_t 의 독립적이고 동일

한 일량성(i.i.d. uniformity)과 1차 4차 적률의 계열상관을 검정하는 방법으로 모형을 진단할 것을 제안하였다. 그러나 이러한 진단방법은 u_t 의 히스토그램과 ACF플롯을 이용한 검정이라는 측면에서 다소 엄밀성이 부족한 검정이며 검정력 또한 좋지 않다. 모형설정 오류가 없다는 귀무가설 하에, 다음과 같이 식(3.8)의 예측확률에 대한 표준정규분포함수의 역함수로 정의되는 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 는 독립적이고 동일한 표준정규분포를 따른다(i.i.d. normal random variable).

$$z_t = F^{-1}(u_t) \quad (3.9)$$

여기에서 $F^{-1}(\cdot)$ 는 표준정규분포함수의 역함수이다. 이와 같이 얻어지는 z_t 에 대한 정규성 검정과 계열상관 검정, 이분산성 검정 등을 이용하여 모형에 대한 진단과 적합성을 평가할 수 있다. 이러한 진단 방법은 Gerlach et al. (1999), Berkowitz (2001), Duan (2003), Liesenfeld and Richard (2003) 등에서 제시된 방법이다¹⁷. 특히 본 연구에서 이용하는 z_t 와 z_t^2 에 대한 정규성 검정과 계열상관 검정, 이분산성 검정은 Berkowitz (2001)에서 확률밀도함수 예측력 검정에 이용된 방법을 모형 진단에 적용한 것이다¹⁸. z_t 의 정규성 검정을 위해 Jarque-Bera 검정과 함께 QQ플롯을 이용할 수 있다.

식(3.9)의 의사표준예측오차를 얻기 위해서는 먼저 식(3.8)의 1기간 예측확률을 구할 수 있어야 한다. 필터링을 이용하여 예측확률을 구하는 방법으로는 파티클필터(particle filter)와 Liesenfeld and Richard (2003)의 EIS필터(efficient importance sampling filter)를 이용하는 방법이 이용될 수 있다. 본 연구에서는 Pitt and Shephard (1999)의 보조파티클필터(APF)를 이용하여 식(3.8)의 예측확률을 구하였다. APF를 이용하여 1기간 예측확률을 구하는 방법은 Kim et al.(1998)에서 이용된 이후, 미관측상태변수를 포함하는 다양한 모형에 이용되고 있다. APF를 이용하여 식(3.8)의 1기간 예측확률을 구할 때 이용되는 모형은 식(3.1) 또는 식(3.4)의 선형상태공간모형으로 변환하기 전의 식(3.1) 또는 식(3.3)의 비선형상태공간모형임에 주의할 필요가 있다. 관측방정식 교란항과 상태방정식 교란항 간의 상관관계를 고려

¹⁷PIT를 이용한 모형진단 방법은 Hong and Li (2005), Chen and Hong (2011)에서도 제시되었다. 이들의 모형진단 방법은 기본적으로 전이확률밀도함수에 의존하는 비모수적 검정방법이다. 그러므로 ARMA필터를 이용하여 필터링한 자료를 분석한 본 연구에는 적용할 수 없다. 그러나 이들의 방법은 비모수 커널확률밀도함수 추정치(nonparametric kernel density estimator)를 이용한 방법이므로 파라미터추정에 따르는 불확실성을 회피할 수 있다는 점에서 유용한 방법이다.

¹⁸기존의 PIT를 이용한 모형 진단 방법은 확률밀도함수 예측력 검정에 이용되는 방법을 모형 진단에 적용한 것이다.

하기 위해 APF를 이용한 필터링에 다음과 같이 변환된 비선형상태방정식을 이용하였다.

$$h_{t+1} = \phi_1 h_t + \dots + \phi_p h_{t+1-p} + \rho \sigma_\eta \frac{y_t}{\sigma_{r_{t-1}}^\gamma} e^{-0.5h_t} + \sigma_\eta \sqrt{1-\rho^2} \tilde{\eta}_t, \quad \tilde{\eta}_t \sim N(0,1) \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} h_{i+1} = \psi_i h_{it} + \sigma_{\varepsilon_i} \rho_i \frac{y_i}{\sigma_{r_{i-1}}^\gamma} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K h_{it}\right) + \sigma_{\varepsilon_i} \sqrt{1-\rho_i^2} \tilde{\varepsilon}_{it}, \text{ for } i = 1, \dots, K \\ \{\tilde{\varepsilon}_{it} \sim i.i.d.N(0,1)\}_{i=0}^K \end{cases}$$

APF를 이용하여 1기간 의사표준예측오차를 얻는 과정에서 일반적인 확률변동성모형에 대한 분석보다 많은 수의 파티클을 생성하는 것이 필요하다. 이는 본 연구의 실증분석모형이 CEV형태의 수준효과를 포함하는 확률변동성모형일 뿐만 아니라 수준효과에 포함된 단기이자율이 단위근에 가까운 지속성(near-unit root persistency)을 가지기 때문이다. CEV형태의 수준효과를 포함하는 확률변동성모형에서 $\gamma > 1$ 인 경우 수준효과가 강하게 나타나게 된다. 이를 충분히 고려하기 위해 많은 수의 파티클을 생성하는 것이 안정적인 결과를 얻는데 도움이 된다. 본 연구에서는 10만개의 파티클을 생성하는 APF를 이용하여 의사표준예측오차를 얻었다. Pitt and Shephard (1999)는 매 시점마다 파티클필터링의 마지막 단계에서 리샘플링(resampling)하는 APF알고리즘을 제시하였다. 그러나 Johansen and Doucet (2008)와 Johannes and Polson (2009)는 이러한 리샘플링이 APF의 몬테카를로분산(Monte Carlo variance)을 증가시킬 수 있음을 지적하였다. 이러한 문제점을 고려하여 본 연구에서는 파티클필터링의 마지막 단계에서 리샘플링을 하지 않는 APF알고리즘을 이용하였다.

3.3.3 모형 적합성 비교

앞서 논의한 모형 진단과 함께 AIC, BIC, HQ를 이용하여 모형의 적합성을 비교할 수 있다. 모형 비교를 하고자 하는 경우 AIC(Akaike information criterion), BIC(Bayesian information criterion), HQ(Hannan-Quinn information criterion)는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} AIC = -2\ln f(\mathbf{Y}_T | \hat{\theta}_{MLE}) + 2k \\ BIC = -2\ln f(\mathbf{Y}_T | \hat{\theta}_{MLE}) + k\ln(T) \\ HQ = -2\ln f(\mathbf{Y}_T | \hat{\theta}_{MLE}) + k\ln(\ln(T)) \end{cases} \quad (3.11)$$

여기에서 $\mathbf{Y}_T = \{y_1, \dots, y_T\}$ 이며, k 는 파라미터 θ 의 차원, T 표본자료의 수 그리고 $f(\mathbf{Y}_T | \hat{\theta}_{MLE})$ 는 파라미터의 최우추정치 $\hat{\theta}_{MLE}$ 에서 평가한 우도를 나타낸다. 식(3.11)의 IC들이 더 작을수록 더 좋은 모형으로 볼 수 있다.

IC를 이용하여 모형들을 비교하고자 할 때 AIC나 HQ보다 BIC를 이용하는 것이 보다 용이하다. 왜냐하면 BIC가 베이스팩터(Bayes factor, BF)와 밀접한 관련이 있기 때문이다. 모든 후보모형에 대한 사전확률이 동일한 경우, BF는 다음과 같이 축약된 형태로 얻어질 수 있다.

$$BF(M_k, M_j) = \frac{f(\mathbf{Y}_T | \theta_k, M_k)}{f(\mathbf{Y}_T | \theta_j, M_j)} \quad (3.12)$$

여기에서 M_k 와 M_j 는 각각 모형 k 와 모형 j 를 나타내며, θ_k 와 θ_j 는 각 모형의 파라미터를 나타낸다. 그리고 BIC는 $BF(M_k, M_j)$ 와 다음과 같은 근사적인 관계가 성립함이 알려져 있다.

$$\ln[BF(M_k, M_j)] \approx \frac{BIC_j - BIC_k}{2} \quad (3.13)$$

식(3.13)에서 근사오차(approximation error)는 $O_p(1)$ 이다. $2\ln BF(M_k, M_j)$ 이 2~6, 6~10 그리고 10보다 크면, 각각 ‘positive’, ‘strong’, ‘very strong’ 한 것으로 해석할 수 있다[Kass and Raftery (1995)].

4. 실증분석

본 절에서는 무위험 단기이자율 대응치로 일반적으로 이용되는 단기이자율들에 대한 실증분석을 통해 이들 단기이자율들의 동태적인 특성을 살펴본다. 일반적으로 파생상품가격결정이나 리스크관리 목적으로 단기이자율을 선택할 때 특정 단기이자율의 특성을 충분히 고려하지 않고 자의적으로 특정 이자율을 선택하는 경향이 있다. 이 경우 파생상품가격결정과 리스크관리에 심각한 문제가 발생할 수 있다.

4.1 분석 자료

1954년 1월 8일~2010년 6월 25일 기간의 3개월 만기 미채무부채권수익률(TB3M), 1971년 1월 8일~2010년 6월 25일 기간의 1개월 만기 유로달러이자율(ED1M), 1998년 6월 5일~2010년 6월 25일 기간의 잔존만기 3개월 한국의 국고채수익률(KRTB3M), 1998년 6월 1일~2011년 12월 30일 기간의 한국의 익일물 콜금리(Call1d), 7일물 MMF수익률(MMF7d), 91일물 CD

수익률(CD91d), 91일물 CP수익률(CP91d) 주간자료를 실증분석에 이용하였다¹⁹. CP91d를 제외한 단기이자율들은 금융실무나 실증분석에서 무위험 단기이자율의 대용치로 흔히 이용되고 있다. CP91d은 신용위험(credit risk)을 포함하고 있는 단기이자율이다. CD91d와 CP91d에 대한 확률변동성모형 추정결과를 비교함으로써 신용위험을 포함하는 단기이자율의 동태적인 특성과 무위험단기이자율 대용치로 이용되는 단기이자율들의 동태적인 특성을 살펴볼 수 있다.

[표 1]과 [그림 1]은 각각 단기이자율에 대한 요약 통계량과 그 통계적 특성에 대한 그래프들을 도시한 것이다. [표 1]에서 JB는 정규성 검정을 위한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 검정통계량, LB(5), ML(5), LM(5)는 각각 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, 라그랑지승수(Lagrange Multiplier) 검정통계량을 나타내며, 괄호안의 수치는 p값을 나타낸다²⁰. 그리고 [그림 1]의 1행과 2행은 r_t 와 Δr_t 를, 3행은 Δr_t 의 커널확률밀도함수(empirical kernel density)와 히스토그램, 그리고 4행과 5행은 각각 Δr_t 와 $(\Delta r_t)^2$ 의 100기간까지의 자기상관계수(autocorrelation coefficient)를 도시한 것이다. [표 1]의 (a)패널에 수록된 요약 통계량들은 단기이자율 수준 가계열상관과 이분산성의 전형적인 특성을 가짐을 보여주고 있다. 그러나 Call1d, MMF7d 그리고 CD91d의 경우에는 첨도가 각각 2.72, 2.22, 그리고 2.89로 정규분포의 첨도(kurtosis) 3보다 작으므로 얇은 꼬리를 가지는 분포의 특성을 보여준다. 이들 이외의 단기이자율들은 첨도가 3보다 큰 첨예분포(leptokurtic distribution)의 특성을 보여주고 있다. [표 1]의 (b)패널은 단기이자율변동 $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$ 의 요약 통계량이다. (b)패널에서 TB3M, KRTB3M, MMF7d의 왜도가 음이므로 왼쪽으로 긴 꼬리를 가지는 특성을 가지고 있음을 보여주고 있다. 이와 달리 ED1M, Call1d, CD91d, CP91d는 양의 왜도를 가지므로 오른쪽으로 긴 꼬리를 가지는 특성을 보여주고 있다. [그림 1]의 3행에 제시된 Δr_t 의 커널확률밀도함수와 히스토그램을 통해서 이러한 특성을 보다 쉽게 확인할 수 있다. 패널 (b)에서 주목할 점은 MMF7d의 LB(5), ML(5), LM(5) 검정통

¹⁹3개월 만기 미재부부채권수익률(TB3M)과 1개월 만기 유로달러이자율(ED1M) 주간 자료는 미연방준비제도 <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.html>에서 제공되는 자료이며, 잔존만기 3개월 한국의 국고채수익률 자료(KRTB3M)는 금융투자협회, 한국의 익일물 콜금리(Call1d), 7일물 MMF이자율(MMF7d), 91일물 CD수익률(CD91), 91일물 CP수익률(CP91)은 한국은행에서 제공되는 자료를 이용하였다.

²⁰일반적으로 이분산성검정을 위한 확률변수의 제공에 대한 Ljung-Box 검정통계량을 McLeod-Li 검정통계량이라 한다. 그리고 LM(5)는 이분산성검정을 위한 Engle (1982)의 ARCH검정을 나타낸다.

계량들이 모두 유의하지 않다는 것이다. 이는 MMF7d의 1기간 변동인 Δr_t 가 계열상관과 이분산성을 가지고 있지 않음을 보여주고 있다. 그러나 패널 (a)에 수록된 MMF7d의 이자율수준에 대한 검정통계량이 유의하므로 MMF7d가 강한 계열상관과 이분산성을 가지고 있음을 알 수 있다. 이러한 특성은 MMF7d의 단위근에 가까운 지속성에 기인하는 것으로 볼 수 있다. [그림 1]의 4행 5열과 5행 5열에 도시된 Δr_t 의 자기상관계수와 $(\Delta r_t)^2$ 의 자기상관계수를 다른 단기이자율들의 그것들과 비교해 보면, MMF7d의 자기상관계수들이 매우 작을 뿐만 아니라 통계적으로 유의하지 않음을 확인할 수 있다²¹.

4.2 단기이자율 확률변동성모형 실증분석

본 절에서는 단기이자율 확률변동성모형에 대한 실증분석 결과를 살펴보기로 한다. 실증분석 모형으로 3장에서 논의한 식(3.2)의 SV-AR(p)모형과 식(3.4)의 MFSV모형을 이용하였다. 구체적인 분석모형은 [표 2]에 제시되어 있다. [표 2]에서 SV-AR(1), SV-AR(2), SV-AR(3)모형은 로그변동성이 각각 AR(1), AR(2) 그리고 AR(3) 과정을 따르는 모형을 나타내며, MFSV(2)모형과 MFSV(3)모형은 각각 2개와 3개의 로그확률변동성을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 y_t 는 관측된 단기이자율에 ARMA(p, q)필터를 적용하여 얻은 잔차를 나타낸다. TB3M, KRTB3M, Call1d, CD91d에는 ARMA(2, 0)필터, ED1M에는 ARMA(4, 0)필터, MMF7d에는 ARMA(1, 0)필터 그리고 CP91d에는 ARMA(2, 2)필터를 적용하였다²².

[표 3]~[표 9]에는 각각의 단기이자율에 대한 확률변동성모형 추정결과와 함께 모형 적합성 비교를 위한 AIC, BIC, HQ, 그리고 모형진단을 위한 1기간 의사표준예측오차에 대한 Jarque-Bera 정규성 검정통계량(JB), 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량(LB(5)), McLeod-Li 검정통계량(ML(5)), Lagrange Multiplier 검정통계량(LM(5))이 제시되어 있다. [표 3] [표 9]에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, 각각의 검정통계량 아래의 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다. 그리고 AIC, BIC, HQ에서 ‘*’는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. [그림 2]는

²¹ 자기상관계수를 도시한 그림에서 점선은 계열상관이 존재하지 않는다는 귀무가설 하의 점근적인 95% 임계값(asymptotic critical value)을 나타낸다.

²² 본문에서 언급하고 있는 ARMA필터 이외 다른 차수의 ARMA(p, q)필터를 적용한 확률변동성모형 추정결과는 본문에서 제시된 결과와 크게 달라지지 않는 강건성을 보였음을 밝힌다.

APF를 이용하여 구한 식(3.8)의 $PIT(u_t)$ 의 일량성 검정을 위해 Diebold et al.(1998)에서 제안된 히스토그램을 도식한 것이다. 히스토그램은 [0,1]구간을 0.05 단위로 구분한 백분위수(percentile) 구간에 해당하는 확률이며, 점선은 95% 신뢰구간을 나타낸다. [그림 3]에는 식(3.9)에서와 같이 APF를 이용하여 구한 PIT를 표준정규분포역변환하여 얻은 의사표준예측오차 z_t 의 정규성 검정을 위한 QQ플롯이 제시되어 있다. [그림 3]에서 점선은 95% 신뢰구간을 나타낸다²³.

[표 3]~[표 9]에서 의사표준예측오차에 대한 JB 검정통계량과 Ljung-Box 검정통계량이 1% 유의수준에서도 모두 유의한 것으로 나타났다. 표면적으로 이러한 진단 결과는 모든 모형의 조건부분포와 조건부 1차적률에 모형설정 오류가 있음을 의미한다. 그러나 이에 대해서는 주의할 필요가 있다. 수준효과를 포함하는 확률변동성모형에서 확률변동성이 관측된다고 가정하는 경우에도 1기간 표준예측오차는 1기간 예측오차를 $\sigma r_{t-1}^{\gamma} \exp(0.5h_t)$ 로 나누어 얻어진다. 수준효과가 존재하지 않는 경우를 제외하면, 파라미터 추정의 불확실성으로 인하여 1기간 표준예측오차에는 단기이자율 수준의 효과가 반영될 수 있다. 특히 수준효과 파라미터 γ 는 식별과 추정이 쉽지 않으므로 파라미터 추정에 따른 표본오류(sampling error)의 영향이 클 수 있다. 본 연구에서 분석하고 있는 확률변동성모형은 확률변동성이 미관측상태변수일뿐만 아니라 수준효과에 포함된 이자율수준이 단위근에 가까운 지속성을 가지고 있으므로 파라미터추정에 따른 표본오류의 영향이 더욱 크게 나타날 수 있다. 이로 인해 1기간 의사표준예측오차에 대한 정규성검정과 계열상관검정이 유의적인 것으로 나타날 수 있다. 이러한 문제를 고려하여, 기존 연구에서 이용된 수준효과를 포함하는 단기이자율 모형에 대한 JB검정과 Ljung-Box검정의 사이즈(size)에 대한 모의실험을

²³[그림 2]~[그림 3]의 그래프를 이용한 모형의 분포에 대한 진단 결과를 해석할 때 KTB3M이 652개 그리고 Call1d, MMF7d, CD91d, CP91d가 683 684개의 소표본임에 주의할 필요가 있다.

수행하였다.²⁴ 모의실험을 통해 이자율의 수준효과가 크고 지속성이 강할 수록 JB검정의 사이즈왜곡이 심각하게 나타나며, 교란항에 포함된 수준효과가 자기상관이나 고차의존성(higher order dependency)으로 포착되는 경향이 있음을 확인할 수 있었다. 모의실험에서 Ljung-Box검정의 사이즈 왜곡은 없는 것으로 나타났다. 그러나 고차적률이 시변하는 경우(예를 들

²⁴CEV형태의 수준효과가 JB검정과 LB검정, Hong and Li (2005) 검정에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 다음과 같은 연속시간모형을 이용한 모의실험을 수행하였다.

$$(i) dX_t = \kappa(\alpha - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, (\kappa, \alpha, \sigma^2) = (0.89218, 0.090495, 0.032742)$$

$$(ii) dX_t = \kappa(\alpha - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t,$$

$$(1)(\kappa, \alpha, \sigma^2, \gamma) = (0.89218, 0.090495, 0.032742, 1.0)$$

$$(2)(\kappa, \alpha, \sigma^2, \gamma) = (0.89218, 0.090495, 0.032742, 1.5)$$

$$(3)(\kappa, \alpha, \sigma^2, \gamma) = (0.89218, 0.090495, 0.032742, 2.0)$$

$$(iii) dX_t = \kappa(\alpha - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t, (\kappa, \alpha, \sigma^2, \gamma) = (0.0972, 0.0808, 0.52186, 1.46)$$

$$(iv) dX_t = (\alpha_{-1}X_t^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1X_t + \alpha_2X_t^2)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t,$$

$$(\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) = (0.00107, -0.0517, 0.877, -4.604, 0.64754, 1.5)$$

(i)~(iv)모형들은 Hong and Li (2005), Li (2007), Chen and Gao (2011) 등에서도 검정통계량의 사이즈와 검정력을 살펴보기 위하여 이용된 모형들이다. (i)의 CIR모형의 파라미터 값들은 Pritsker (1998)에서 이용된 것이며, (ii)-(1), (iii), (iv) 모형의 파라미터 값들은 Ait-Sahalia (1999)의 추정치이다. (ii)-(2)와 (3)의 파라미터 설정은 γ 크기가 커짐에 따라서, 즉 수준효과 크기가 더 큰 모형에 대한 검정의 사이즈를 살펴보기 위한 것이다. 그리고 (iii)은 CKLS모형으로 (i), (ii)보다 평균회귀성향이 매우 약한 경우를 살펴보기 위한 파라미터 값으로 설정하였다. (iv)모형은 Ait-Sahalia (1996a, 1996b, 1999)에서 이용된 모형으로 매우 큰 수준효과와 함께 비선형 평균회귀성향을 가지는 모형이다. 이러한 모형은 매우 작거나 큰 이자율 수준에서는 강한 평균회귀성향이 나타나지만 그렇지 않은 경우 평균회귀성향이 매우 약하다는 특징을 가진다. (i)의 CIR모형을 제외하고 전이확률밀도함수를 알 수 없다. 그러므로 비교를 위한 자료생성과정의 공정성을 확보할 수 있도록 Milstein 이산화를 이용하여 각각의 연속시간모형으로부터 자료를 생성하였다. 각각의 모형에서 자료생성은 일간빈도에서 생성된 자료를 10일마다 관측하는 50년간의 자료와 0.5일 빈도에서 생성된 자료를 5일마다 관측하는 25년간의 자료에 해당하는 크기의 자료를 생성한 후 각 검정통계량의 사이즈(size)를 살펴보는 모의실험을 1000번 수행하였다. 모의실험을 통해 수준효과가 클수록, 그리고 평균회귀성향이 약할수록 1%, 5%, 10% 유의수준에서 LB검정을 제외한 JB검정과 계열상관을 검정하는 Hong and Li (2005)의 M(1,1) 검정에서 과다기각(over-rejection)의 사이즈 왜곡이 나타날 수 있음을 확인하였다. 특히 Hong and Li (2005)의 M(1,1) 검정은 자료생성빈도, 관측빈도, 수준효과 크기와 관계없이 수준효과가 존재하는 경우 과다기각이 발생하는 것으로 나타났다. 그리고 Hong and Li (2005)의 portmanteau 검정은 이러한 수준효과를 고차의 의존성(higher order dependency)으로 포착하여(detect) 과다기각이 발생하는 경향이 있는 것으로 나타났다. 필요한 경우 모의실험 결과에 관한 보다 자세한 내용을 저자들에게 요청할 수 있다.

어 이분산성이 존재하는데 이를 고려하지 않은 계열상관검정) Ljung-Box 검정의 사이즈 왜곡이 발생할 수 있다는 점과 모의실험결과 그리고 조건부분산에 대한 진단 통계량이 전반적으로 유의하지 않은 점을 고려하면, Ljung-Box 검정의 유의성을 과도하게 고려하여 모든 모형설정을 기각하는 것은 바람직하지 않은 것으로 판단된다. [표 3] [표 9]의 정규성검정과 계열상관검정 결과가 분석모형이 수준효과를 포함하는 확률변동성모형이라는 특징에 기인할 수 있기 때문이다. 본 분석의 목적은 확률변동성에 포함된 수준효과 파라미터에 대한 추정을 통해서 단기이자율의 안정성의 특징을 분석하는데 있다. 그러므로 계열상관으로 인한 조건부이분산성이 심각한 문제가 되지 않는 한 이후 실증분석 결과를 살펴보면서 JB검정과 LB검정에 대해서는 더 이상 언급하지 않기로 한다.

먼저 TB3M에 대한 추정결과를 살펴보자. [그림 2]의 1행에 도시된 히스토그램을 보면 모든 모형에서 0.25 0.35 구간에서 95% 신뢰구간을 벗어나는 것으로 나타났다. [그림 3]의 1행에 도시된 QQ플롯을 보면, 모든 모형에서 양쪽꼬리가 95% 신뢰구간을 조금씩 벗어나고 있으므로 분포의 꼬리부분이 다소 두꺼운 것으로 나타나지만, 그 정도는 심각하지 않은 것으로 보이고 있다. [그림 2] [그림 3]은 모형의 분포에 대한 가정이 충분하지는 않지만 그 정도가 심각하지 않은 것을 보여준다. [표 3]에서 MFSV(3)모형을 제외한 모든 모형에서 McLeod-Li 검정과 LM 검정이 5% 유의수준에서 유의하지 않으며, MFSV(3)모형의 경우 1% 유의수준에서는 유의하지 않으므로 조건부분산에 대한 모형설정의 오류가 없는 것으로 볼 수 있다.²⁵ 수준효과 파라미터는 SV-AR(1)모형 0.54, SV-AR(2)모형 0.54, SV-AR(3)모형 0.51, MFSV(2)모형 0.49, 그리고 MFSV(3)모형에서 0.47로 추정되었으며 모두 유의한 것으로 나타났다. 이러한 수준효과 파라미터 추정 결과는 TB3M이 'drift-induced stationary' 임을 의미한다. 2장에서 논의되었듯이 단기이자율의 DIS 또는 VIS 여부는 수준효과 파라미터 γ 의 크기에 의해서 결정되며, 추세함수에 대한 제약조건들은 해의 유일성 보장과 이자율이 0이 되거나 무한대로 발산하지 않도록 하는 조건이다. 본 분석에서는 ARMA 필터로 필터링한 자료를 분석하였으므로 추세함수에 대한 제약조건 충족 여부를 확인할 수 없다. 그러나 모든 모형에서 추정치가 약 0.5이므로 TB3M이 CIR과정과 같은 수준효과를 가지는 DIS 확률과정이라는 강한 통계적인 증거를 보여주고 있다. SV-AR(1)모형, SV-AR(2)모형, SV-AR(3)모형의 관측방정식과 상태방정식의 교란항의 상관계수 ρ 는 유의한 -0.19 -0.17로 추정되었다. 이러한 결과는 기존 실증분석모형에서 자주 이용되는 $\rho = 0$ 의

²⁵특별한 언급이 없는 한 이하의 검정 통계량 해석에서 유의수준은 5%이다.

가정이 TB3M의 동태적인 특징을 설명하는데 충분하지 않음을 의미한다. MFSV(2)모형 추정 결과를 보면 ρ_1 은 유의하지 않은 반면, ρ_2 는 유의적인 -0.29로 추정되었다. 이 결과는 음(양)의 이자율충격이 장기변동성보다는 일시적인 단기변동성을 증가(감소)시킴을 의미한다. MFSV(3)모형 추정 결과에서는 ρ_1 은 유의하지 않은 반면, ρ_2 와 ρ_3 는 각각 유의한 -0.60와 0.84로 추정되었다. MFSV(3)모형의 경우 McLeod-Li검정과 LM검정이 5% 유의수준에서 유의하지만 1% 유의수준에서는 유의하지 않다. 그러므로 MFSV(3) 추정결과에서 ρ_2 와 ρ_3 추정치 해석에 주의할 필요가 있다.

[표 3]에서 AIC, BIC 그리고 HQ를 기준으로 모형을 비교하면, 각각 MFSV(3)모형, SV-AR(1)모형, MFSV(2)모형이 선택되는 것으로 나타난다. AIC는 예측을 목적으로 하는 경우에 주로 이용될 수 있는 효율성(eficiency)을 충족하는 IC인 반면, BIC와 HQ는 모형의 분석자료 근사정도에 대한 정보를 주는 일치성(consistency)의 특성을 가지고 있다. 따라서 동일한 자료를 분석하는 경우에도 분석목적에 따라 상이한 모형이 선택될 수 있다. 비교기준이 되는 IC에 따라 상이한 모형이 선택됨은 각 모형의 특징을 보여주는 것으로 볼 수 있다. AIC를 이용한 비교에서는 다요인모형인 MFSV(2)모형과 MFSV(3)모형이 큰 차이를 보이지 않으며, HQ를 이용한 비교에서는 SV-AR(3)모형, MFSV(2)모형, MFSV(3)모형이 큰 차이를 보이지 않는다. 그러나 MFSV(3)모형의 경우에는 5% 유의수준에서 McLeod-Li검정과 LM검정이 유의하므로 MFSV(3)모형을 비교에서 제외할 수 있다. BIC와 베이즈팩터에 대한 식(3.13)의 관계를 고려하면, BIC를 이용한 모형비교에서 SV-AR(1)모형, SV-AR(3)모형, MFSV(2)모형이 서로 유의하지 않은 1보다 작은 차이를 보이고 있다. 이는 SV-AR(1)과 같은 비교적 단순한 모형 이외에도 장기기억을 포착할 수 있는 SV-AR(3)모형과 MFSV(2)모형도 TB3M의 확률변동성을 설명할 수 있음을 의미한다. 이러한 결과로부터 기존연구에서 이들 모형과 유사한 특징을 가지는 확률변동성 모형들이 제시된 이유를 짐작할 수 있다. 단기이자율의 동태적인 안정성의 특성을 결정하는 수준효과 파라미터 γ 추정치가 모두 비슷하므로 IC들을 이용한 모형비교를 심각하게 고려할 필요는 없다. 이후 살펴볼 다른 단기이자율에 대한 결과에서도 이와 유사한 추정결과들을 얻을 수 있었다. 그러나 각 IC를 기준으로 한 모형 비교로부터 기존 연구에서 다양한 모형이 제시되는 이유를 짐작할 수 있으며, 분석목적에 따라 다른 모형을 선택할 수 있음을 알 수 있다.

다음으로 ED1M에 대한 추정결과를 살펴보자. [그림 2]의 2행에 수록된 히스토그램은 모든 모형들에서 일량성이 충족되지 않는 것으로 나타나고

있다. [그림 3]의 2행에 수록된 z_t 의 QQ플롯은 오른쪽 꼬리부분이 95% 신뢰구간을 벗어나고 있으므로 분포의 오른쪽 꼬리가 두꺼운 것으로 볼 수 있다. 이는 모형의 분포에 대한 가정이 충족되지 않음을 의미한다. [표 4]에서 MFSV(2)모형의 경우 McLeod-Li 검정과 LM 검정이 유의하며, MFSV(3) 모형의 경우 1% 유의수준에서도 유의하다. 따라서 MFSV(3)모형의 모형 설정이 충분하지 않은 것으로 볼 수 있다. 다른 모형들에 대한 조건부분산 진단통계량은 유의하지 않은 것으로 나타났다. 수준효과 파라미터 γ 추정치는 SV-AR(1)모형에서 1.10, SV-AR(2)모형에서 1.08, SV-AR(3)모형에서 1.12, MFSV(2)모형에서 1.32로 추정되었다. 각 모형에서 γ 가 모두 유의한 1보다 큰 값으로 추정되었으므로 ED1M이 VIS 특성을 보이는 것으로 해석할 수 있다. SV-AR(1)모형, SV-AR(2)모형, SV-AR(3)모형의 ρ 추정치는 유의하지 않지만, MFSV(2)모형의 ρ_1 과 ρ_2 는 각각 유의한 -0.35, 0.18로 추정되었다. 이러한 추정치는 음(양)의 이자율충격이 장기변동성에는 양(음)의 영향을 미치면서 동시에 일시적인 변동성에는 음(양)의 영향을 미침을 의미한다. [표 4]에서 AIC, BIC, HQ를 기준으로 모형을 비교하면, 각각 MFSV(3) 모형, SV-AR(1)모형 그리고 MFSV(2)모형이 선택된다. 그러나 MFSV(2)모형은 5% 유의수준에서 그리고 MFSV(3)모형은 1% 유의수준에서 McLeod-Li 검정과 LM 검정이 유의하므로 확률변동성을 충분히 설명하지 못하는 것으로 볼 수 있다.²⁶ 그러나 BIC를 이용한 모형 비교에서 SV-AR(1)모형과 MFSV(2)모형의 차이가 약 0.63 정도로 유의미한 차이를 보이지는 않는다.

다음으로 KRTB3M 추정결과를 살펴보자. [그림 2]의 3행에 도시된 히스토그램을 보면, SV-AR(1)모형이 0.40 0.45범위, SV-AR(2)모형이 0.05 0.1범위와 0.40 0.45범위, MFSV(2)모형이 0.40 0.45범위, MFSV(3)모형이 0.05 0.1범위에서 95% 신뢰구간을 벗어나는 것으로 나타났다. [그림 3]의 3행에 도시된 QQ플롯을 보면, [그림 2]의 히스토그램에서 95% 신뢰구간을 벗어난 범위에서 모든 모형들에 대한 QQ플롯도 함께 95% 신뢰구간을 벗어나는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 모형의 분포에 대한 가정이 충분하지 않음을 의미한다. [표 5]에서는 ML(5)과 LM(5)의 검정통계량이 모두 유의하지 않으므로 모든 모형이 확률변동성을 충분히 설명하고 있음을 보여준다. 수준효과 파라미터 γ 추정치는 모두 유의하며, SV-AR(1)모형에서

²⁶본문에는 포함시키지 않았지만, 모의실험(simulation experiment)을 통해서 확률변동성 성분의 수가 지나치게 많은 경우 표본자료의 잡음(noise)마저 지속성을 가지는 확률변동성으로 포착함으로써 모형진단에서 이분산성 검정을 통과하지 못하는 경우가 발생할 수도 있음을 확인할 수 있었다. 이와 같은 측면에서 본 연구에서 분석하는 일반적인 확률변동성모형을 진단할 때 이분산성 검정이 확률변동성 성분의 수가 부족하거나 지나치게 많은 모형에서 모두 일정한 검정력을 보일 수 있음에 주의할 필요가 있다.

1.29, SV-AR(2)모형에서 1.27, SV-AR(3)모형에서 1.19, MFSV(2)모형에서 1.09, MFSV(3)모형에서 1.38로 추정되었다. 이러한 γ 추정치들은 KRTB3M이 VIS 특성을 가질 수 있음을 보여준다. 단일요인 확률변동성모형들에서 관측방정식과 상태방정식의 교란항의 상관계수 ρ 는 유의한 $-0.28 \sim -0.22$ 로 추정되었다. 그리고 MFSV(2)모형에서는 ρ_1 추정치는 유의하지 않은 반면 ρ_2 추정치는 5% 유의수준에서 한계적으로 유의한(marginally significant) -0.28 로 추정되었다. MFSV(3)모형에서는 ρ_2 추정치만 유의한 -0.83 으로 추정되었고 ρ_1 과 ρ_2 는 유의하지 않은 것으로 나타났다. AIC를 기준으로 모형을 비교하면 SV-AR(3) 모형이 선택되지만, BIC와 HQ를 기준으로 비교하면 SV-AR(1)모형이 선택되는 것으로 나타났다. 특히 BIC를 기준으로 할 경우, SV-AR(1)모형이 다른 모형들과 6보다 큰 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 그리고 MFSV(2)모형 추정결과에서 첫 번째 로그확률변동성 방정식의 교란항에 대한 표준편차 σ_{η_1} 가 유의하지 않은 점은 IC기준으로 선택된 단일요인 확률변동성모형이 보다 적합성이 좋음을 보여준다. 그러나 SV-AR(1)모형은 SV-AR(3)모형의 내포모형(nested model)이므로 우도비검정으로도 비교할 수 있다. [표 5]에서 SV-AR(1)모형과 SV-AR(3)모형 비교를 위한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 우도비검정통계량이 유의한 6.68이므로 SV-AR(1)모형을 기각할 수 있다. 내포모형이 아닌 경우에는 IC를 이용한 비교가 유용할 수 있지만 내포모형들의 경우 우도비검정을 이용하여 모형을 비교할 수 있다. 이때 우도비검정 결과와 IC를 이용한 모형비교 결과가 항상 일치하지는 않음에 주의할 필요가 있다. MFSV(3)모형의 로그변동성방정식에서 교란항의 표준편차들이 모두 유의적으로 추정된 점은 MFSV(2)모형 추정결과와 대비된다. 그러나 MFSV(3)모형은 SV-AR(1)과 SV-AR(3)의 단일모형에 비해 추가적으로 설명할 수 있는 확률변동성이 없음에도 불구하고 추정해야 할 파라미터의 수가 많으므로 IC기준으로 선택되지 않는다.

다음으로 Call1d에 대한 추정결과를 살펴보자. [그림 2]의 4행에 도시된 히스토그램을 보면, 모든 모형들이 0.05~0.1범위에서 95% 신뢰구간을 벗어나고 있으며, 다요인 모형의 경우에는 0.90~0.95범위에서도 95% 신뢰구간을 벗어나고 있다. [그림 3]의 4행에 수록된 QQ플롯에서는 모든 모형들이 양쪽꼬리부분에서 95% 신뢰구간을 벗어난 것으로 나타나고 있다. [그림 2]~[그림 3]의 결과는 모형의 분포에 대한 가정이 충분하지 않음을 의미한다. [표 6]의 Call1d에 대한 추정결과에서도 ML(5)과 LM(5) 검정통계량이 모두 유의하지 않으므로 모든 모형이 확률변동성을 충분히 설명하고 있음을 보여준다. 그리고 모든 모형에서 γ 추정치가 1보다 작지만, 특

히 MFSV(2)모형에서 가장 작은 0.70으로 추정되었다. 이러한 γ 추정치는 Call1d가 DIS 특성을 가지고 있음을 보여주고 있다. 단일요인 확률변동성 모형들의 ρ 는 유의한 -0.24~-0.17로 추정되었다. MFSV(2)모형의 경우 ρ_1 은 유의하지 않음에 반해 ρ_2 는 유의한 -0.45로 추정되었다. 이로부터 양(음)의 이자율 충격이 장기 변동성에는 영향을 주지 않지만 일시적인 단기변동성에 음(양)의 영향을 줌을 알 수 있다. MFSV(3)모형에서 ρ_1 은 유의하지 않지만, ρ_2 와 ρ_3 는 유의한 -0.84와 -0.25로 추정되었다. 이는 다요인 확률변동성모형에서 음의 이자율충격이 장기변동성보다는 중기와 단기변동성을 증가시킴을 의미한다. 특히 중기변동성을 더 크게 증가시키는 것으로 나타난 점은 주목할 만한 특징이다. IC들을 기준으로 모형들을 비교하면 MFSV(2)모형이 선택된다. 그러나 BIC를 이용한 비교에서 SV-AR(2)모형과 MFSV(2)모형이 2보다 작은 차이만을 보이고 있으므로 두 모형이 유의한 차이를 보이는 것으로 볼 수 없다.

다음으로 MMF7d에 대한 추정결과를 살펴보자. [그림 2]의 5행에 수록된 히스토그램에서는 대부분의 모형들이 0.05~0.10, 0.55~0.60, 0.95~1의 범위에서는 95% 하한을 벗어나고 0.15~0.30, 0.75~0.85의 범위에서는 95% 상한을 벗어나는 것으로 나타났다. [그림 3]의 5행에 도시된 QQ플롯에서는 모든 모형들이 분포의 오른쪽 꼬리부분에서 95% 신뢰구간을 벗어나는 남을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 모형의 분포에 대한 가정이 충족되지 않음을 의미한다. 그러나 [표 7]에서 조건부분산 진단통계량이 모두 유의하지 않으므로 모든 모형이 확률변동성을 충분히 설명하고 있음을 알 수 있다. [표 7]에서 가장 주목할 점은 수준효과 파라미터 γ 추정치가 2에 가까운 값으로 추정된 점이다. 이는 MMF7d가 VIS 특성을 가짐을 의미한다. 단일요인 확률변동성모형들에서 상관계수 ρ 는 유의한 -0.39~-0.28로 추정되었다. MFSV(2)모형에서 ρ_1 과 ρ_2 는 각각 유의한 0.88, -0.41로 추정되었으며, MFSV(3)모형에서는 ρ_3 는 유의하지 않지만 ρ_1 과 ρ_2 는 각각 유의한 0.72와 -0.77로 추정되었다. AIC와 HQ를 기준으로 모형을 비교하면 SV-AR(3)모형이 선택되지만, BIC를 기준으로 모형들을 비교하는 경우 2보다 큰 유의한 차이로 SV-AR(1)모형이 선택된다. 그러나 SV-AR(1)모형이 SV-AR(3)모형을 비교하는 우도비검정 통계량이 유의한 8.54이므로 SV-AR(1)을 기각할 수 있다. SV-AR(3)모형의 경우, ML(5)과 LM(5) 진단통계량이 SV-AR(1)모형의 그것에 비해서 다소 커지는 것으로 나타났다. 이는 확률변동성의 시차를 증가시키는 것이 오히려 이분산성에 대한 설명력을 약화시킬 수 있음을 보여준다.

다음으로 CD91d에 대한 추정결과를 살펴보자. [그림 2]의 6행에 수록된

히스토그램에서 모든 모형들이 0.05~0.10범위에서는 95% 하한을, 0.20~0.25범위에서는 95% 상한을 벗어나는 것으로 나타나고 있다. 그리고 대부분의 모형에서 0.75~0.80범위에서 95% 상한을 벗어나고 있다. [그림 3]의 6행에 도시된 QQ플롯에서는 왼쪽 꼬리가 정규분포보다 두꺼운 것으로 나타나고 있다. 이러한 결과는 전반적으로 모형의 분포에 대한 가정이 충분하지 않음을 의미한다. [표 8]의 추정결과를 보면, 조건부분산 진단통계량이 모두 유의하다. 이는 5% 유의수준에서 모든 모형이 확률변동성을 설명하기에 충분하지 않음을 의미한다. 그러나 1% 유의수준에서는 SV-AR(1)모형, SV-AR(2)모형, MFSV(2)모형이 유의하지 않은 것으로 나타나고 있다. 이들 모형의 수준효과 파라미터 γ 는 각각 1.70, 1.72, 1.60으로 추정되어 CD91d가 VIS 특성을 가지고 있음을 보여준다. SV-AR(1)모형과 SV-AR(2)모형의 관측방정식과 상태방정식의 교란항들의 상관계수 ρ 는 유의한 약 -0.25로 추정되었으며, MFSV(2)모형의 ρ_1 과 ρ_2 는 각각 유의한 0.91과 -0.32로 추정되었다. 그리고 AIC를 기준으로 모형들을 비교하면 SV-AR(3)가 선택되지만 조건부분산 진단통계량이 유의하므로 이를 선택하는 것은 바람직하지 않다. BIC와 HQ를 기준으로 모형들을 비교하면 SV-AR(1)모형이 선택되는 것으로 나타났다. BIC를 기준으로 모형들을 비교하면, SV-AR(1)모형이 4보다 큰 유의미한 차이를 보이고 있다. 그러나 SV-AR(1)모형과 SV-AR(3)모형을 비교하는 우도비검정 통계량이 유의한 6.34이므로 SV-AR(1)모형을 기각할 수 있다.

마지막으로 CP91d에 대한 추정결과를 살펴보자. [그림 2]의 7행에 수록된 히스토그램에서 모든 모형이 0.45~0.50, 0.90~0.95범위에서 95% 하한을 벗어나고 있으며, 0.15~0.35, 0.75~0.85범위에서는 95%상한을 벗어나는 것으로 나타나고 있다. [그림 3]의 7행에 수록된 QQ플롯에서는 양쪽 끝부분에서 95% 신뢰구간을 벗어나지 않지만 왼쪽부분 일부에서 정규분포보다 얇은 부분이 있는 것으로 나타나고 있다. 이러한 결과는 모형의 분포에 대한 가정이 충분하지 않음을 보여준다. [표 9]의 추정결과에서 조건부분산에 대한 진단통계량이 모두 유의하지 않으므로 모든 모형이 확률변동성을 충분히 설명하는 것으로 볼 수 있다. 모든 모형에서 수준효과 파라미터 γ 가 2에 가까운 크기로 추정되었으므로 CP91d가 VIS 특성을 가짐을 알 수 있다. 단일요인 확률변동성모형에서 ρ 추정치는 유의한 -0.3 내외로 추정되었다. MFSV(2)모형에서는 ρ_1 은 유의하지 않은 반면 ρ_2 는 유의한 -0.41로 추정되었다. MFSV(3)모형에서 ρ_1 은 5% 유의수준에서 한계적으로 유의한 0.36, ρ_2 와 ρ_3 는 각각 유의한 -0.59, 0.67로 추정되었다. AIC, BIC, HQ를 이용한 모형 비교에서는 SV-AR(3)모형이 선택되는 것으로 나타났다.

특히 SV-AR(3)모형의 ML(5)과 LM(5) 검정통계량들이 가장 작은 값을 가지는 것으로 나타났는데, 이를 SV-AR(3)모형이 확률변동성의 특징을 가장 잘 설명하는 것으로 해석할 수도 있다. 신용위험이 포함되어 있는 CP91d의 경우, AR(1)과정이나 AR(2)과정으로 충분히 설명할 수 없는 확률변동성의 지속성이 있음을 보여주고 있다. 또한, 이러한 추정결과는 신용위험이 추가적인 확률변동성으로 나타나지는 않지만 확률변동성의 지속성을 증가시킬 수 있음을 보여준다. 왜냐하면 신용위험이 단기이자율 확률변동성과 함께 추가적인 확률변동성으로 나타나는 경우 단일요인 확률변동성모형보다 다요인 확률변동성모형이 보다 좋은 설명력을 가질 것이기 때문이다. 그러므로 SV-AR(3)모형이 선택되는 것을 신용위험이 추가적인 확률변동성으로 나타나지 않고 단기이자율 확률변동성으로 흡수되거나 또는 이에 비례하여 움직임으로써 확률변동성의 지속성을 증가시키는 경향이 있음을 보여주는 것으로 해석할 수 있다.

지금까지 살펴본 다양한 단기이자율 확률변동성모형 추정결과들은 단기이자율들이 매우 상이한 안정성의 특성을 가지고 있다는 것과 단기이자율들에서도 주가지수 수익률과 마찬가지로 단기이자율 교란항과 확률변동성 교란항 사이에 음의 상관관계가 존재한다는 것을 보여주고 있다. 특히 TB3M과 Call1d는 수준효과 파라미터 γ 추정치가 0.5에 가깝거나 1보다 작은 DIS 특성을 가지는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 이들 단기이자율의 동학을 ATSM 또는 QTSM으로 적합·설명할 수 있음을 의미한다. 그리고 이들 단기이자율들을 포함하는 채권이나 이자율 파생상품가격결정, 그리고 리스크관리 등에 ATSM 또는 QTSM을 적용할 수 있음을 의미한다. 이와 달리 ED1M, KRTB3M, MMF7d, CD91d, CP91d는 수준효과 파라미터 γ 추정치가 1보다 큰 VIS 특성을 가지는 것으로 나타났다. 이러한 추정결과는 DIS를 가정하는 ATSM과 QTSM으로 이들 단기이자율의 동태적인 특성이나 이들을 포함하는 이자율기간구조의 동태적인 특성을 설명하는 것이 충분하지 않을 수 있음을 의미한다. 특히, 자산운용, 증권, 보험 등의 한국 금융기관들이 파생상품가격결정과 채권포트폴리오 리스크관리를 위해 무위험단기이자율 대응치로 일반적으로 이용하는 Call1d, MMF7d, CD91d가 매우 상이한 안정성의 특성을 가짐을 확인할 수 있다. 앞서 살펴본 바와 같이 Call1d가 DIS 특성을 가짐에 반해, MMF7d와 CD91d는 VIS 특성을 가지는 것으로 나타났다. 따라서 어떤 이자율을 무위험단기이자율의 대응치로 선택하는가에 따라 파생상품가격결정과 리스크관리 성과가 상이하게 나타날 수 있을 것이다. 단기이자율의 안정성의 특성을 충분히 고려하지 않고 무위험단기이자율 대응치를 선택하는 경우 의도하지 않은 손실과 리

스크관리 실패가 발생할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 수준효과를 포함하는 일반적인 확률변동성모형을 이용하여 무위험단기이자율 대응치로 이용되는 단기이자율들의 안정성의 특성을 규명하고 이를 통해 단기이자율의 안정성의 특성이 기존 이자율기간구조모형의 가정과 부합하는지를 살펴보았다. 단기이자율의 안정성은 단기이자율 확률과정의 변동성함수에 포함된 수준효과 파라미터의 크기에 따라 DIS와 VIS로 구분될 수 있다. 재무실증분석 및 금융실무 등에서 무위험단기이자율의 대응치로 일반적으로 이용되는 TB3M, ED1M, KRTB3M, Call1d, MMF7d, CD91d 등의 자료에 대한 실증분석 결과, TB3M과 Call1d만이 ATSM 또는 QTSM의 기존 이자율기간구조모형과 부합하는 DIS 특성을 가지는 것으로 나타났다. 이와 달리 ED1M, KRTB3M, MMF7d, CD91d는 ATSM, QTSM과 부합하지 않는 VIS 특성을 가지는 것으로 나타났다. 이러한 분석결과는 DIS를 가정하는 ATSM과 QTSM이 이들 단기이자율들의 동태적인 특성을 충분히 설명할 수 없을 뿐만 아니라 이들 단기이자율들을 이자율기간구조모형에 포함시키는 경우 ATSM과 QTSM의 단기측면(short end)의 적합성이 좋지 않을 수 있음을 의미한다. 또한, ATSM과 QTSM의 이자율기간구조모형, 이자율 파생상품가격결정모형뿐만 아니라 많은 자산가격결정모형들이 단기이자율의 DIS를 가정하거나 이러한 가정에 바탕을 두고 있으므로 단기이자율 대응치가 VIS 특성을 가지는 경우 기존 이론모형들을 이용할 수 없음을 의미한다. 이러한 단기이자율의 안정성의 특성을 충분히 고려하지 않고 DIS를 가정하는 기존 이론모형들을 이용할 경우 의도하지 않은 심각한 오류가 발생할 수 있다. 그리고 무위험단기이자율의 대응치인 Call1d와 MMF7d, CD91d가 매우 상이한 안정성의 특성을 가지고 있으므로 단기이자율 대응치 선택에 따라 채권가격결정, 파생상품가격결정, 리스크관리 등의 성과가 크게 달라 질 수 있다. 그리고 신용위험을 포함하는 단기이자율인 CP91d에 대한 실증분석결과, 신용위험이 추가적인 확률변동성으로 나타나지 않고 단기이자율 확률변동성으로 흡수되거나 또는 이에 비례하여 움직임으로써 확률변동성의 지속성을 증가시킬 수 있음을 확인할 수 있었다. 본 연구의 분석결과들은 다양한 단기이자율들의 안정성의 특성을 고려하지 않은 무위험단기이자율 대응치 선택이 바람직하지 않을 수 있음을 시사한다.

본 연구에서 분석한 일반적인 확률변동성모형은 닫힌 형태의 채권가

격과 이자율과생상품가격을 가지지 않으므로 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 가격을 구할 수밖에 없다. 그리고 단기이자율이 VIS 특성을 보이는 경우를 가정하거나 포함하는 일반적인 자산가격결정모형은 (저자들이 알고 있는 한) 현재까지 제시된 바 없다. 무위험단기이자율 대응치의 VIS 특성에도 불구하고 이를 무시한 기존 이론모형 적용이 자산가격에 미치는 영향은 개별 자산이나 포트폴리오에 따라 다르게 나타날 수 있다. 그러므로 VIS 특성을 포함하는 모형이나 이론이 없는 상황에서 DIS를 가정하는 기존모형을 대안적으로 활용하기 위해서는 자산별로 VIS 특성을 보이는 단기이자율(대응치)이 자산가격과 리스크관리 성과에 미치는 영향을 분석하는 것이 필요하다. 이러한 단기이자율 대응치 선택이 개별 자산가격과 리스크관리 성과에 미치는 영향에 대한 분석은 향후 연구에서 다루기로 한다.

참고문헌

- Ahn, D-H. and B. Gao (1999), "A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics," *Review of Financial Studies*, 12, pp. 721-762.
- Aït-Sahalia, Y. (1996a), "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate," *Review of Financial Studies*, 9(2), pp. 385-426.
- _____ (1996b), "Nonparametric pricing of interest rate derivative securities," *Econometrica*, 54, 527-560
- _____ (1999), "Transition Densities for Interest Rate and Other Non-linear Diffusions," *Journal of Finance*, 54, 1361-1395
- Andersen, L. and J. Andreasen(2000), "Volatility skews and extensions of the Libor market models," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1-32
- Andersen, T.G. and L. Benzoni (2010), "Do Bonds Span Volatility Risk in the U.S. Treasury Markets? A Specification Test for Affine Term Structure Models," *Journal of Finance*, 65(2), 603-653,
- Asai, M. (2008), "Autoregressive stochastic volatility models with heavy-tailed distributions: A comparison with multifactor volatility models," *Journal of Empirical Finance*, 15, 332-341.
- Asai, M. and M. McAleer (2005), "Dynamic Asymmetric Leverage in Stochastic Volatility Models," *Econometric Reviews*, 24, 317-332.
- _____ (2006), "Asymmetric Multivariate Stochastic Volatility," *Econometric Reviews*, 25, 453-473.
- Ball, C.A. and W.N. Torous (1999), "The Stochastic Volatility of Short-Term Interest Rates : Some International Evidence," *Journal of Finance*, 54(6), pp. 2339-2359.
- Berkowitz, J. (2001), "Testing Density Forecasts, With Applications to Risk Management," *Journal of Business and Economic Studies*, 19(4), 465-474.
- Bertholon, H., A. Monfort, and F. Pegoraro (2008), "Econometric Asset Pricing Model," *Journal of Financial Econometrics*, 6(4), 407-458.

- Bikov, R. and M. Chernov (2009), "Unspanned Stochastic Volatility in Affine Models: Evidence from Eurodollar Futures and Options," *Management Science*, 55(8), 1292-1305.
- _____ (2011), "Yield Curve and Volatility: Lessons from Eurodollar Futures and Options," *Journal of Financial Econometrics*, 9(1), 66-105.
- Breidt, F.J., and A.L. Carriquiry (1996), "Improved quasi-maximum likelihood estimation for stochastic volatility models," Springer.
- Chen, S.X. and J. Gao (2011), "Simultaneous specification testing of mean and variance structures in nonlinear time series regression," *Econometric Theory*, 27, 792-843
- Chen, B. and Y. Hong(2011), "Generalized spectral testing for multivariate continuous-time models," *Journal of Econometrics*, 164, 268-293.
- Cheng, P. and O. Scaliliet (2007), "Linear-Quadratic Jump-Diffusion Modelling," *Mathematical Finance*, 17, 575-598.
- Cheridito, P., D. Filipović and R. Kimmel (2007), "Market Price of Risk Specifications for Affine Models: Theory and Evidence," *Journal of Financial Economics*, 83, pp. 123-170.
- Chernov, M., A.R. Gallant, E. Ghysels, and G. Tauchen (2003), "Alternative Models for Stock Price Dynamics," *Journal of Econometrics*, 116, 225-257.
- Collin-Dufresne, P. and R.S. Goldstein (2002), "Do bonds span the fixed income markets? Theory and evidence for unspanned stochastic volatility," *Journal of Finance*, 57, 1685-1730.
- Collin-Dufresne, P., R.S. Goldstein and C.S. Jones (2009), "Can Interest rate volatility be extracted from the cross section of bond yields," *Journal of Financial Economics*, 94, 47-66
- Conley, T.G., L.P. Hansen, E.G.J. Luttmer, and J.A. Scheinkman (1997), "Short-term interest rates as subordinated diffusions," *Review of Financial Studies*, 10(3), 525-577.

- Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, 385-407.
- Dai, Q. and K. Singleton(2000, "Specification Analysis of Affine Term Structure Models," *Journal of Finance*, 55, pp. 1943-1978.
- Diebold, F.X., T.A. Gunther and A.S. Tay(1998), "Evaluating density forecasts with applications to financial risk management," *International Economic Review*, 38, 863-883.
- Duan, J.-C. (2003), "Specification Test for Time Series Models by a Normality Transform", Working Paper, University of Toronto
- Duffee, G. (2002), "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models," *Journal of Finance*, 57, 405-443.
- Duffie, D. and R. Kan (1996), "A Yield Factor Model of Interest Rate," *Mathematical Finance*, 6, 379-406.
- Durbin, J. and S. Koopman (1997) "Monte Carlo maximum likelihood estimation for non - Gaussian state space models," *Biometrika*, 84, 669-684.
- _____ (2000), "Time series analysis of non-Gaussian observations on state space models from both classical and Bayesian perspectives," *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 62, 3-56
- Durham, G.B. (2003), "Likelihood-Based Specification Analysis of Continuous-Time Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Financial Economics*, 70, 463-487.
- Engle, R.F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50(4), 987-1007
- Feller, W. (1951). "Two singular diffusion problems," *The Annals of Mathematics* 54, 173-182
- Fong, H.G. and O.A. Vasicek (1991), "Fixed Income Volatility Management," *Journal of Portfolio Management*, Summer, 41-46.

- Gallant, A.R., C-T. Hsu and G. Tauchen (1999), "Using Daily Range Data To Calibrate Volatility Diffusions And Extract The Forward Integrated Variance," *Review of Economics and Statistics*, 81(4), 617-631.
- Gerlach, G., Carter, C.K. and Kohn, R. (1999), "Diagnostics for time series Analysis," *Journal of Time Series Analysis*, 20, 309-330.
- Granger, C. W. J. and M. J. Morris (1976), "Time Series Modelling and Interpretation," *Journal of Royal Statistical Society*, 139, 246-257.
- Harvey, A.C. and N. Shephard (1996), "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns," *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 429-434.
- Higham, N. J. (1988), "Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix," *Linear Algebra and Its Applications*, 103, 103-118.
- _____ (2008), *Functions of Matrices : Theory and Computation*, SIAM, Philadelphia
- Hong, Y., H. Li (2005), "Nonparametric specification testing for continuous-time models with applications to term structure of interest rates," *Review of Financial Studies*, 18, 37-84.
- Jacobs, K. and L. Karoui (2009), "Conditional volatility in affine term-structure models: Evidence from Treasury and swap markets," *Journal of Financial Economics*, 91, 288-318
- Jagannathan, R.A. Kaplin and S. Sun(2003), "An evaluation of multi-factor CIR models using LIBOR, swap rates, and cap and swaption prices," *Journal of Econometrics*, 116, 113-146
- Johannes, M. and N. Polson (2009), "Particle Filtering," *Handbook of Financial Time Series*, Springer.
- Johansen, A.M. and A. Doucet (2008), "A note on auxiliary particle filters," *Statistics and Probability Letters*, 78, 1498-1504.
- Jones, C.S. (2003a), "Nonlinear Mean Reversion in the Short-Term Interest Rate," *Review of Financial Studies*, 16, 793-843.

- _____ (2003b), "The Dynamics of Stochastic Volatility: Evidence from Underlying and Options Markets," *Journal of Econometrics*, 116, 181-224.
- Kalimipalli, M. and R. Susmel (2004), "Regime-Switching Stochastic Volatility and Short-Term Interest Rates," *Journal of Empirical Finance*, Volume 11(3), 309-329.
- Koopman, S.J. (1993), "Disturbance smoother for state space models," *Biometrika*, 80(1), 117-126
- Leippold, M. and L. Wu (2002). "Asset Pricing under the Quadratic Class," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 271-295.
- Li, F. (2007), "Testing the parametric specification of the diffusion function in a diffusion process," *Econometric Theory*, 23, 221-250.
- Li, H. and F. Zhao (2006), "Unspanned stochastic volatility: evidence from hedging interest rate derivatives," *Journal of Finance*, 61, 341-378.
- Kass, R.E. and A. Raftery (1995), "Bayes factors," *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773-795.
- Kim, S.J., N. Shephard and S. Chib (1998), "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," *Review of Economic Studies*, 65(3), 361-393.
- Kloeden, P.E. and E. Platen(1992), *Numerical solution of Stochastic Differential Equation*, Springer-Verlag, New York.
- Liesenfeld, R. and J. Richard (2003), "Univariate and multivariate stochastic volatility models: Estimation and diagnostics," *Journal of Empirical Finance* 10, 505-531.
- Litterman, R. and J. Scheinkman (1991), "Common factors affecting bond returns," *Journal of Fixed Income*, 1, 54-61
- Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz (1992), "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, 47, 1259-1282.

- Monfort, A. and F. Pegoraro (2006), "Multi-Lag Term Structure Models with Stochastic Risk premia," CREST Discussion Paper.
- _____ (2007), "Switching VARMA Term Structure Models," *Journal of Financial Econometrics* 5(1), 105-153.
- Øksendal, B. (1998), *Stochastic Differential Equations: an Introduction to Applications*, Springer, Berlin
- Pitt, M.K. and Neil Shephard (1999), "Filtering via simulation: auxiliary particle filter," *Journal of the American Statistical Association*, 94, 590-599.
- Pritsker, M. (1998), "Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous Time Interest Rate Models," *Review of Financial Studies*, 11, 449-487
- Rosenblatt, M. (1952), "Remarks on a Multivariate Transformation," *Annals of Mathematical Statistics*, 23, 470-472.
- Sandmann, G. and S. J. Koopman (1998), "Estimation of stochastic volatility models via monte carlo maximum likelihood," *Journal of Econometrics*, 87, 271-301.
- Shephard, N. and M.K. Pitt (1997), "Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series," *Biometrika*, 84
- Smith, D. R. (2002), "Markov-Switching and Stochastic Volatility Diffusion Models of Short-Term Interest Rates," *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 183-197.
- Sun, L. (2005). "Regime shifts in interest rate volatility," *Journal of Empirical Finance*, 12, 418-434.
- Thomson, S. (2008), "Identifying Term Structure Volatility from the LIBOR-Swap Curve," *Review of Financial Studies*, 21(2), 819-854.
- Trolle, A.B. and E. S. Schwartz(2008), "A General Stochastic Volatility Model for the Pricing of Interest Rate Derivatives," *Review of Financial Studies*, 22(5), 2007-2057
- Vasicek, O.A. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

Yu, J. (2005), "On Leverage in a Stochastic Volatility Model," *Journal of Econometrics*, 127, 165-178.

[표 1] 단기이자율 요약 통계량

(A) r_t

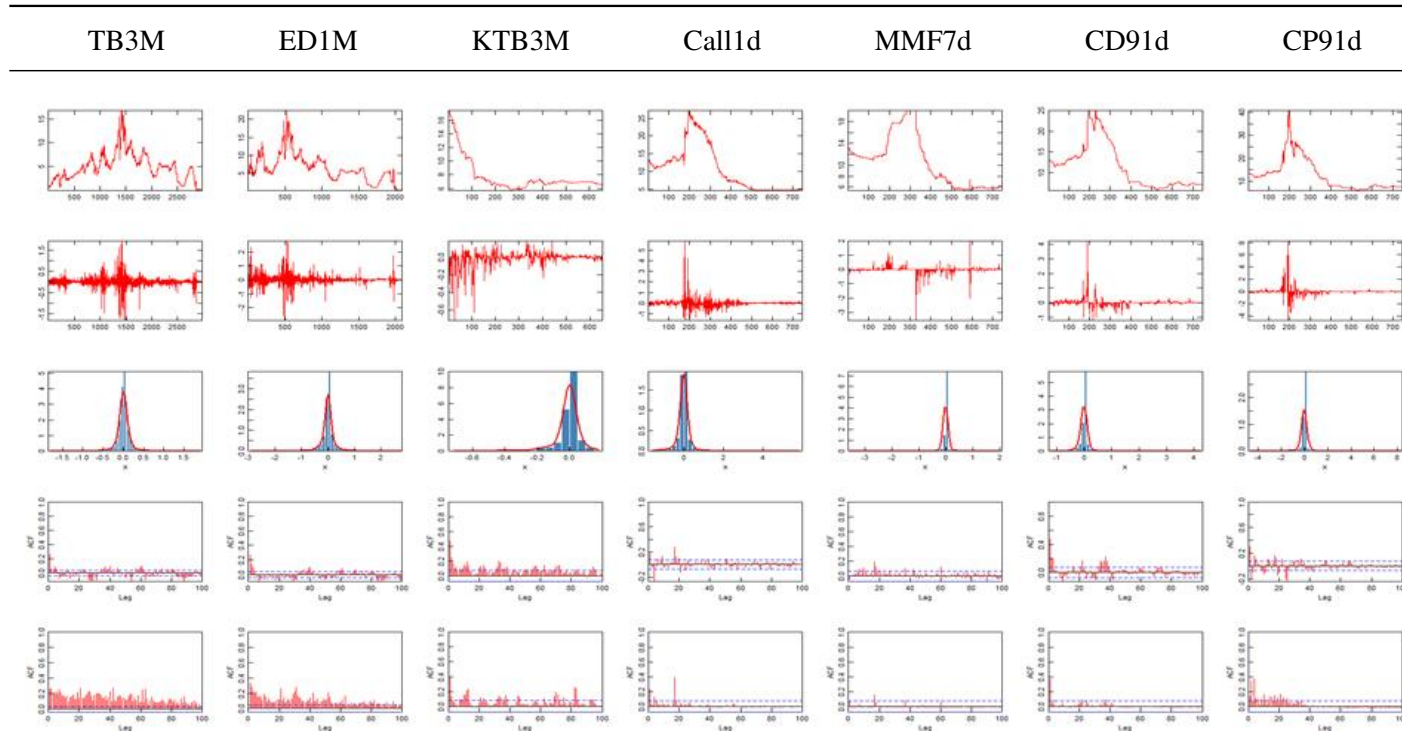
	TB3M	ED1M	KTB3M	Call	MMF7d	CD91	CP91
평균	4.92	6.37	7.76	10.56	10.57	11.41	12.55
표준편차	2.909	3.7252	2.4761	6.3143	4.6828	5.2717	6.7365
최소값	0.02	0.28	5.72	4.67	5.42	5.7	6.05
최대값	16.76	22.41	17.44	27.15	19.99	25	40.77
왜도	0.9636 (0.0000)	0.9357 (0.0000)	2.3646 (0.0000)	0.9208 (0.0000)	0.6501 (0.0000)	0.9686 (0.0000)	1.4919 (0.0000)
첨도	4.5802 (0.0000)	4.4626 (0.0000)	7.8586 (0.0000)	2.7255 (0.0000)	2.2178 (0.0000)	2.8907 (0.0000)	5.061 (0.0000)
JB	769.92 (0.0000)	491.02 (0.0000)	1252.71 (0.0000)	107.77 (0.0000)	71.57 (0.0000)	117.03 (0.0000)	408.78 (0.0000)
LB(5)	14544 (0.0000)	10107 (0.0000)	3042.7 (0.0000)	3687 (0.0000)	3713.2 (0.0000)	3691.6 (0.0000)	3631.9 (0.0000)
ML(5)	14189 (0.0000)	9755.5 (0.0000)	2975.2 (0.0000)	3647.8 (0.0000)	3706.5 (0.0000)	3644.4 (0.0000)	3452.1 (0.0000)
LM(5)	2944.08 (0.0000)	2060.45 (0.0000)	633.39 (0.0000)	740.37 (0.0000)	743.6 (0.0000)	743.13 (0.0000)	732.42 (0.0000)

(B) Δr_t

	TB3M	ED1M	KTB3M	Call	MMF7d	CD91	CP91
평균	-0.0004	-0.0028	-0.0167	-0.0115	-0.0091	-0.0082	-0.0082
표준편차	0.1973	0.3089	0.087	0.405	0.2271	0.2615	0.6147
최소값	-1.82	-2.93	-0.72	-1.66	-3.59	-1.25	-4.76
최대값	1.92	2.78	0.18	5.85	2	4.23	8.26
왜도	-0.7108 (0.0000)	0.1646 (0.0000)	-3.4678 (0.0000)	5.8115 (0.0000)	-5.7683 (0.0000)	7.7351 (0.0000)	3.9539 (0.0000)
첨도	25.73 (0.0000)	22.47 (0.0000)	21.77 (0.0000)	81.67 (0.0000)	107.91 (0.0000)	118.96 (0.0000)	71.14 (0.0000)
JB	64255.1 (0.0000)	32985.8 (0.0000)	10895.6 (0.0000)	196293 (0.0000)	345759.1 (0.0000)	424844.5 (0.0000)	146085.3 (0.0000)
LB(5)	253.62 (0.0000)	217.07 (0.0000)	220.98 (0.0000)	82.28 (0.0000)	3.18 (0.0000)	223.45 (0.0000)	132.9 (0.0000)
ML(5)	824.96 (0.0000)	698.41 (0.0000)	117.25 (0.0000)	57.016 (0.0000)	4.6966 (0.0000)	113.65 (0.0000)	216.47 (0.0000)
LM(5)	425.432 (0.0000)	351.5848 (0.0000)	99.2979 (0.0000)	52.1283 (0.0000)	4.7523 (0.0000)	127.5153 (0.0000)	147.4417 (0.0000)

주) 표에서 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성 검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량을 나타낸다. 그리고 첨도와 왜도를 포함한 각각의 검정통계량아래 (·) 안의 수치는 p값을 나타낸다.

[그림 1] 단기이자율의 통계적 특성



주) 그림에서 1행과 2행은 r_t 와 Δr_t , 3행은 Δr_t 의 커널확률밀도함수(empirical kernel density)와 히스토그램, 그리고 4행과 5행은 각각 Δr_t 와 $(\Delta r_t)^2$ 의 100기간 자기상관계수(autocorrelation coefficient)를 도시한 것이다.

[표 2] 단기이자율 확률변동성모형

SV-AR(1)	$\begin{cases} y_t = \sigma \exp(0.5h_t) r_{t-1}^\gamma \varepsilon_t \\ h_{t+1} = \phi_1 h_t + \sigma_\eta \eta_t \\ \text{corr}(\eta_t, \varepsilon_t) = \rho \end{cases}$
SV-AR(2)	$\begin{cases} y_t = \sigma \exp(0.5h_t) r_{t-1}^\gamma \varepsilon_t \\ h_{t+1} = \phi_1 h_t + \phi_2 h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \\ \text{corr}(\eta_t, \varepsilon_t) = \rho \end{cases}$
SV-AR(3)	$\begin{cases} y_t = \sigma \exp(0.5h_t) r_{t-1}^\gamma \varepsilon_t \\ h_{t+1} = \phi_1 h_t + \phi_2 h_{t-1} + \phi_3 h_{t-2} + \sigma_\eta \eta_t \\ \text{corr}(\eta_t, \varepsilon_t) = \rho \end{cases}$
MFSV(2)	$\begin{cases} y_t = \sigma \exp(0.5h_t) r_{t-1}^\gamma \varepsilon_t \\ h_{1t+1} = \psi_1 h_{1t} + \sigma_{\eta_1} \eta_{1t} \\ h_{2t+1} = \psi_2 h_{2t} + \sigma_{\eta_2} \eta_{2t} \quad , \quad \psi_1 \geq \psi_2 \\ h_t = h_{1t} + h_{2t} \\ \text{corr}(\eta_{jt}, \varepsilon_t) = \rho_j \quad , \quad j = 1, 2 \end{cases}$
MFSV(3)	$\begin{cases} y_t = \sigma \exp(0.5h_t) r_{t-1}^\gamma \varepsilon_t \\ h_{1t+1} = \psi_1 h_{1t} + \sigma_{\eta_1} \eta_{1t} \\ h_{2t+1} = \psi_2 h_{2t} + \sigma_{\eta_2} \eta_{2t} \\ h_{3t+1} = \psi_3 h_{3t} + \sigma_{\eta_3} \eta_{3t} \quad , \quad \psi_1 \geq \psi_2 \geq \psi_3 \\ h_t = h_{1t} + h_{2t} + h_{3t} \\ \text{corr}(\eta_{jt}, \varepsilon_t) = \rho_j \quad , \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$

주) 표에서 $y_t = r_t - a - \sum_{i=1}^p b_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j y_{t-j}$ 이다.

[표 3] 단기이자율 확률변동성모형 추정 결과(TB3M)

	SV-AR(1)	SV-AR(2)	SV-AR(3)	MFSV(2)	MFSV(3)
ϕ_1	0.9753 [0.0050]	0.8862 [0.2119]	1.6912 [0.2976]		
ϕ_2		0.0875 [0.2080]	-1.3599 [0.4123]		
ϕ_3			0.6492 [0.1325]		
ψ_1				0.9922 [0.0031]	0.9920 [0.0031]
ψ_2				0.8630 [0.0417]	0.8213 [0.0525]
ψ_3					0.7151 [0.1511]
σ_η	0.2772 [0.0205]	0.2986 [0.0542]	0.6492 [0.1325]		
σ_{η_1}				0.1379 [[0.0243]	0.1413 [0.0277]
σ_{η_2}				0.3148 [0.0337]	0.3445 [0.0411]
σ_{η_3}					0.1604 [0.0518]
σ	0.0263 [0.0027]	0.0263 [0.0027]	0.0259 [0.0028]	0.0260 [0.0041]	0.0260 [0.0041]
ρ	-0.1920 [0.0507]	-0.1937 [0.0511]	-0.1707 [0.0563]		
ρ_1				0.0033 [0.1089]	0.0071 [0.1187]
ρ_2				-0.2932 [0.0725]	-0.5953 [0.1327]
ρ_3					0.8380 [0.0512]
γ	0.5412 [0.0799]	0.5419 [0.0802]	0.5098 [0.0874]	0.4846 [0.0925]	0.4716 [0.0916]
$\log L$	-5813.75	-5813.67	-5806.30	-5801.92	-5797.39
AIC	11633.65	11635.43	11622.65	11615.81	11612.84*
BIC	11663.67*	11671.4	11664.57	11663.97	11678.84
HQ	11644.35	11648.21	11637.81	11633.05*	11636.62
JB	86.2036 (0.0000)	93.1306 (0.0000)	51.1144 (0.0000)	126.4126 (0.0000)	154.2392 (0.0000)
LB(5)	41.409 (0.0000)	41.2556 (0.0000)	43.0289 (0.0000)	42.5513 (0.0000)	42.8237 (0.0000)
ML(5)	10.1862 -0.0701	10.9421 -0.0525	6.8243 -0.234	11.0342 -0.0507	13.462 -0.0194
LM(5)	9.9183 -0.0776	10.6263 -0.0593	6.5771 -0.254	10.8564 -0.0543	13.1138 -0.0223

주) 표에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, AIC, BIC, HQ는 각각 Akaike information criterion, Bayesian information criterion, Hannan-Quinn information criterion을 나타낸다. AIC, BIC, HQ에서 *는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 에 대한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량이다. 각각의 검정통계량아래 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다.

[표 4] 단기이자율 확률변동성모형 추정 결과(ED1M)

	SV-AR(1)	SV-AR(2)	SV-AR(3)	MFSV(2)	MFSV(3)
ϕ_1	0.9730 [0.0084]	1.0015 [0.1705]	1.6612 [0.1399]		
ϕ_2		-0.0297 [0.1684]	-1.3034 [0.1961]		
ϕ_3			0.6239 [0.0955]		
ψ_1				0.9916 [0.0035]	0.9919 [0.0032]
ψ_2				0.8706 [0.0329]	0.8637 [0.0331]
ψ_3					
σ_η	0.3758 [0.0271]	0.3777 [0.0580]	0.6239 [0.0955]		
σ_{η_1}				0.1740 [0.0325]	0.1659 [0.0330]
σ_{η_2}				0.4094 [0.0414]	0.3532 [0.0356]
σ_{η_3}					0.2914 [0.0447]
σ	0.0253 [0.0039]	0.0252 [0.0037]	0.0256 [0.0046]	0.0265 [0.0057]	0.0278 [0.0061]
ρ	-0.0441 [0.0691]	-0.0347 [0.0695]	-0.0121 [0.0778]		
ρ_1				-0.3532 [0.1095]	-0.3411 [0.1093]
ρ_2				0.1792 [0.0902]	0.7550 [0.0545]
ρ_3					-0.6978 [0.0663]
γ	1.1045 [0.2532]	1.0767 [0.2523]	1.1170 [0.2843]	1.3200 [0.2242]	1.2296 [0.2127]
$\log L$	-4113.08	-4110.48	-4108.53	-4101.84	-4096.46
AIC	8224.28	8221.16	8219.28	8207.81	8203.02*
BIC	8252.43*	8254.93	8258.69	8253.06	8265.15
HQ	8234.71	8233.46	8233.67	8224.49*	8225.74
JB	597.1151 (0.0000)	694.5788 (0.0000)	628.0676 (0.0000)	801.1143 (0.0000)	1188.7927 (0.0000)
LB(5)	75.6691 (0.0000)	76.5460 (0.0000)	73.1427 (0.0000)	59.3581 (0.0000)	52.5711 (0.0000)
ML(5)	11.0270 (0.0509)	5.2344 (0.3880)	10.8235 (0.0550)	12.4143 (0.0295)	20.1076 (0.0012)
LM(5)	11.0529 (0.0503)	5.2659 (0.3843)	10.0655 (0.0734)	11.9736 (0.0352)	18.5118 (0.0024)

주) 표에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, AIC, BIC, HQ는 각각 Akaike information criterion, Bayesian information criterion, Hannan-Quinn information criterion을 나타낸다. AIC, BIC, HQ에서 *는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 에 대한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량이다. 각각의 검정통계량아래 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다.

[표 5] 단기이자율 확률변동성모형 추정 결과(KTB3M)

	SV-AR(1)	SV-AR(2)	SV-AR(3)	MFSV(2)	MFSV(3)
ϕ_1	0.9049 [0.0278]	0.7196 [0.2737]	2.1721 [0.2082]		
ϕ_2		0.1742 [0.2577]	-1.9270 [0.3096]		
ϕ_3			0.7215 [0.1241]		
ψ_1				0.9906 [0.0115]	0.9906 [0.0063]
ψ_2				0.8765 [0.0877]	0.9374 [0.0218]
ψ_3					0.5706 [0.1754]
σ_η	0.4598 [0.0689]	0.5239 [0.1139]	0.7215 [0.1241]		
σ_{η_1}				0.0691 [0.0891]	0.0448 [0.0710]
σ_{η_2}				0.4764 [0.0890]	0.2340 [0.0900]
σ_{η_3}					0.5179 [0.0986]
σ	0.0183 [0.0018]	0.0182 [0.0018]	0.0181 [0.0020]	0.0182 [0.0034]	0.0174 [0.0024]
ρ	-0.2760 [0.1056]	-0.2652 [0.1059]	-0.2187 [0.1060]		
ρ_1				0.0938 [0.3964]	0.6984 [1.3958]
ρ_2				-0.2853 [0.1502]	-0.8272 [0.3325]
ρ_3					0.2421 [0.1654]
γ	1.2921 [0.2811]	1.2758 [0.2834]	1.1875 [0.2919]	1.0942 [0.4449]	1.3806 [0.3743]
$\log L$	-1301.31	-1301.39	-1298.02	-1300.77	-1297.37
AIC	2608.59	2610.80	2606.04*	2613.54	2612.76
BIC	2630.95*	2637.60	2637.34	2649.34	2661.99
HQ	2617.26*	2621.17	2618.17	2627.43	2631.80
JB	29.7636 (0.0000)	33.5033 (0.0000)	14.5931 (0.0007)	33.8628 (0.0000)	74.6484 (0.0000)
$LB(5)$	130.0574 (0.0000)	129.2398 (0.0000)	140.5200 (0.0000)	123.8633 (0.0000)	139.2888 (0.0000)
$ML(5)$	3.3085 (0.6525)	3.0502 (0.6922)	3.7361 (0.5880)	3.0599 (0.6907)	6.6732 (0.2461)
$LM(5)$	3.3411 (0.6476)	3.0771 (0.6881)	3.5558 (0.6149)	3.1580 (0.6756)	6.6599 (0.2472)

주) 표에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, AIC, BIC, HQ는 각각 Akaike information criterion, Bayesian information criterion, Hannan-Quinn information criterion을 나타낸다. AIC, BIC, HQ에서 *는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 에 대한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량이다. 각각의 검정통계량아래 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다.

[표 6] 단기이자율 확률변동성모형 추정 결과(Call1d)

	SV-AR(1)	SV-AR(2)	SV-AR(3)	MFSV(2)	MFSV(3)
ϕ_1	0.8682 [0.0313]	0.2097 [0.0770]	0.2223 [0.1283]		
ϕ_2		0.6653 [0.0873]	0.1305 [0.1313]		
ϕ_3			0.5378 [0.1343]		
ψ_1				0.9861 [0.0096]	0.9902 [0.0066]
ψ_2				0.2255 [0.2010]	0.9214 [0.0609]
ψ_3					0.3236 [0.1590]
σ_η	0.6412 [0.0715]		0.5378 [0.1343]		
σ_{η_1}		0.7467 [0.0645]		0.1995 [0.0439]	0.1492 [0.0362]
σ_{η_2}				0.8341 [0.0739]	0.1161 [0.0604]
σ_{η_3}					0.8085 [0.0698]
σ	0.0197 [0.0019]	0.0194 [0.0023]	0.0194 [0.0026]	0.0180 [0.0046]	0.0167 [0.0044]
ρ	-0.2408 [0.0859]	-0.1918 [0.0794]	-0.1717 [0.0837]		
ρ_1				0.1253 [0.1146]	0.2155 [0.1372]
ρ_2				-0.4473 [0.0967]	-0.8378 [0.0494]
ρ_3					-0.2554 [0.1088]
γ	0.9729 [0.3168]	0.8495 [0.3262]	0.8477 [0.3433]	0.6991 [0.3688]	0.8874 [0.3377]
$\log L$	-1399.88	-1392.78	-1391.55	-1385.68	-1383.23
AIC	2801.53	2789.37	2788.96	2779.20*	2780.29
BIC	2824.14	2816.49	2820.59	2815.33*	2830.01
HQ	2810.27	2799.89	2801.19	2793.20*	2799.55
JB	80.7189 (0.0000)	127.7382 (0.0000)	164.8310 (0.0000)	236.4709 (0.0000)	261.4134 (0.0000)
$LB(5)$	246.7832 (0.0000)	212.2309 (0.0000)	197.1333 (0.0000)	184.7051 (0.0000)	182.9782 (0.0000)
$ML(5)$	6.7532 (0.2397)	6.2009 (0.2872)	4.2976 (0.5074)	3.0960 (0.6852)	3.1969 (0.6697)
$LM(5)$	7.9974 (0.1564)	6.4981 (0.2607)	4.3358 (0.5022)	3.1484 (0.6771)	3.2255 (0.6653)

주) 표에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, AIC, BIC, HQ는 각각 Akaike information criterion, Bayesian information criterion, Hannan-Quinn information criterion을 나타낸다. AIC, BIC, HQ에서 *는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 에 대한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량이다. 각각의 검정통계량아래 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다.

[표 7] 단기이자율 확률변동성모형 추정 결과(MMF7d)

	SV-AR(1)	SV-AR(2)	SV-AR(3)	MFSV(2)	MFSV(3)
ϕ_1	0.8677 [0.0317]	1.3141 [0.1769]	1.6883 [0.0581]		
ϕ_2		-0.4171 [0.1578]	-1.3673 [0.0956]		
ϕ_3			0.5824 [0.0591]		
ψ_1				0.9889 [0.0098]	0.9868 [0.0088]
ψ_2				0.8664 [0.0319]	0.8741 [0.0296]
ψ_3					0.8552 [0.0427]
σ_η	0.5852 [0.0627]	0.4018 [0.0955]	0.5824 [0.0591]		
σ_{η_1}				0.0258 [0.0175]	0.0350 [0.0212]
σ_{η_2}				0.5892 [0.0644]	0.4270 [0.1027]
σ_{η_3}					0.4283 [0.0870]
σ	0.0182 [0.0016]	0.0183 [0.0014]	0.0178 [0.0010]	0.0179 [0.0018]	0.0180 [0.0019]
ρ	-0.2839 [0.0842]	-0.3872 [0.0877]	-0.3785 [0.0145]		
ρ_1				0.8767 [0.0976]	0.7230 [0.1456]
ρ_2				-0.4122 [0.0759]	-0.7726 [0.0776]
ρ_3					0.2466 [0.1946]
γ	1.9012 [0.2836]	2.0252 [0.2511]	2.0231 [0.0750]	1.8769 [0.2836]	1.8386 [0.2830]
$\log L$	-1320.69	-1318.71	-1316.42	-1318.48	-1318.47
AIC	2647.49	2645.58	2642.98*	2649.06	2655.08
BIC	2670.13*	2672.66	2674.65	2685.25	2704.81
HQ	2656.25	2656.04	2655.22*	2663.09	2674.30
JB	149.5559 (0.0000)	86.6640 (0.0000)	77.8505 (0.0000)	192.6445 (0.0000)	295.2196 (0.0000)
$LB(5)$	551.3128 (0.0000)	601.5044 (0.0000)	606.1965 (0.0000)	529.8302 (0.0000)	512.0163 (0.0000)
$ML(5)$	5.4738 (0.3608)	3.8372 (0.5731)	9.0797 (0.1059)	5.7094 (0.3355)	4.1018 (0.5349)
$LM(5)$	5.0166 (0.4139)	3.4862 (0.6255)	9.2196 (0.1006)	5.5501 (0.3525)	3.8239 (0.5750)

주) 표에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, AIC, BIC, HQ는 각각 Akaike information criterion, Bayesian information criterion, Hannan-Quinn information criterion을 나타낸다. AIC, BIC, HQ에서 *는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 에 대한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량이다. 각각의 검정통계량아래 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다.

[표 8] 단기이자율 확률변동성모형 추정 결과(CD91d)

	SV-AR(1)	SV-AR(2)	SV-AR(3)	MFSV(2)	MFSV(3)
ϕ_1	0.9036 [0.0239]	1.2922 [0.0490]	2.1326 [0.1400]		
ϕ_2		-0.3630 [0.0498]	-1.8761 [0.2117]		
ϕ_3			0.7090 [0.1028]		
ψ_1				0.9906 [0.0081]	0.9872 [0.0080]
ψ_2				0.9034 [0.0243]	0.9012 [0.0246]
ψ_3					0.6738 [0.1087]
σ_η	0.4558 [0.0526]	0.3183 [0.0259]	0.1946 [0.0426]		
σ_{η_1}				0.0216 [0.0146]	0.0543 [0.0240]
σ_{η_2}				0.4568 [0.0561]	0.3754 [0.0742]
σ_{η_3}					0.3811 [0.0910]
σ	0.0148 [0.0014]	0.0148 [0.0008]	0.0145 [0.0016]	0.0141 [0.0016]	0.0142 [0.0017]
ρ	-0.2463 [0.0914]	-0.2558 [0.0107]	-0.1482 [0.1027]		
ρ_1				0.9143 [0.0732]	0.5961 [0.1679]
ρ_2				-0.3228 [0.0919]	-0.7252 [0.0876]
ρ_3					0.5420 [0.2039]
γ	1.7048 [0.3169]	1.7240 [0.1460]	1.4963 [0.3555]	1.6007 [0.3215]	1.6633 [0.2899]
$\log L$	-1292.93	-1292.03	-1289.76	-1291.34	-1288.44
AIC	2588.30	2588.50	2585.98*	2591.10	2591.30
BIC	2610.84*	2615.55	2617.53	2627.23	2640.96
HQ	2597.04*	2598.95	2598.20	2605.10	2610.49
JB	201.6749 (0.0000)	124.6750 (0.0000)	124.0495 (0.0000)	167.7288 (0.0000)	316.2838 (0.0000)
$LB(5)$	177.3232 (0.0000)	189.9115 (0.0000)	196.0942 (0.0000)	171.2012 (11.6418)	145.4537 (0.0000)
$ML(5)$	12.5013 (0.0285)	12.1631 (0.0326)	16.6591 (0.0052)	11.6419 (0.0400)	15.9781 (0.0069)
$LM(5)$	12.8582 (0.0247)	12.3923 (0.0298)	16.0661 (0.0066)	12.1889 (0.0323)	17.1191 (0.0042)

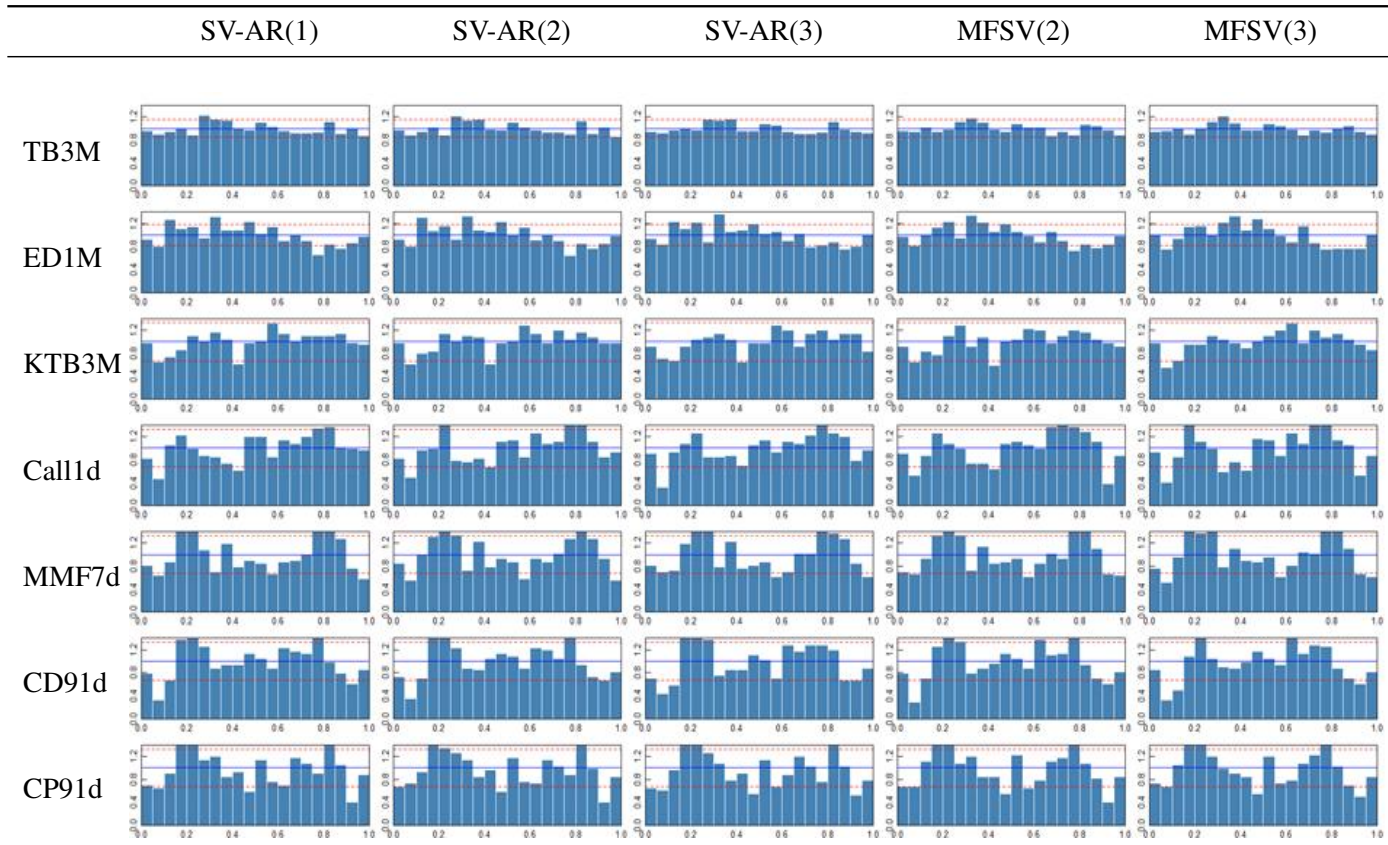
주) 표에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, AIC, BIC, HQ는 각각 Akaike information criterion, Bayesian information criterion, Hannan-Quinn information criterion을 나타낸다. AIC, BIC, HQ에서 *는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 에 대한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량이다. 각각의 검정통계량아래 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다.

[표 9] 단기이자율 확률변동성모형 추정 결과(CP91d)

	SV-AR(1)	SV-AR(2)	SV-AR(3)	MFSV(2)	MFSV(3)
ϕ_1	0.8913 [0.0260]	1.2871 [0.2158]	2.4005 [0.1042]		
ϕ_2		-0.3713 [0.1981]	-2.1417 [0.1630]		
ϕ_3			0.7163 [0.0709]		
ψ_1				0.9898 [0.0088]	0.9902 [0.0060]
ψ_2				0.8737 [0.0421]	0.8648 [0.0293]
ψ_3					0.6770 [0.1324]
σ_η	0.4733 [0.0565]	0.3385 [0.0947]	0.7163 [0.0709]		
σ_{η_1}				0.0575 [0.0353]	0.0612 [0.0267]
σ_{η_2}				0.4793 [0.0593]	0.4698 [0.0584]
σ_{η_3}					0.2320 [0.0918]
σ	0.0149 [0.0013]	0.0149 [0.0012]	0.0148 [0.0013]	0.0149 [0.0018]	0.0148 [0.0019]
ρ	-0.3151 [0.0911]	-0.3182 [0.0874]	-0.2974 [0.0807]		
ρ_1				0.3525 [0.3364]	0.3697 [0.1879]
ρ_2				-0.4107 [0.1108]	-0.5928 [0.0884]
ρ_3					0.6774 [0.0902]
γ	2.0084 [0.3142]	1.9884 [0.2987]	1.9909 [0.3025]	1.8237 [0.3521]	1.8090 [0.2679]
$\log L$	-1278.32	-1276.88	-1270.72	-1275.29	-1274.71
AIC	2559.13	2558.25	2548.00*	2559.06	2563.91
BIC	2581.74	2585.36	2579.55*	2595.20	2613.57
HQ	2567.88	2568.76	2560.23*	2573.07	2583.11
JB	128.7369 (0.0000)	96.9369 (0.0000)	131.5554 (0.0000)	124.8682 (0.0000)	167.1518 (0.0000)
LB(5)	471.8890 (0.0000)	483.3993 (0.0000)	493.5582 (0.0000)	452.3907 (0.0000)	435.7550 (0.0000)
ML(5)	8.2852 (0.1412)	7.9180 (0.1608)	5.4337 (0.3653)	10.0248 (0.0745)	9.7102 (0.0839)
LM(5)	8.5110 (0.1302)	8.0968 (0.1510)	5.5733 (0.3500)	10.2023 (0.0697)	10.0314 (0.0744)

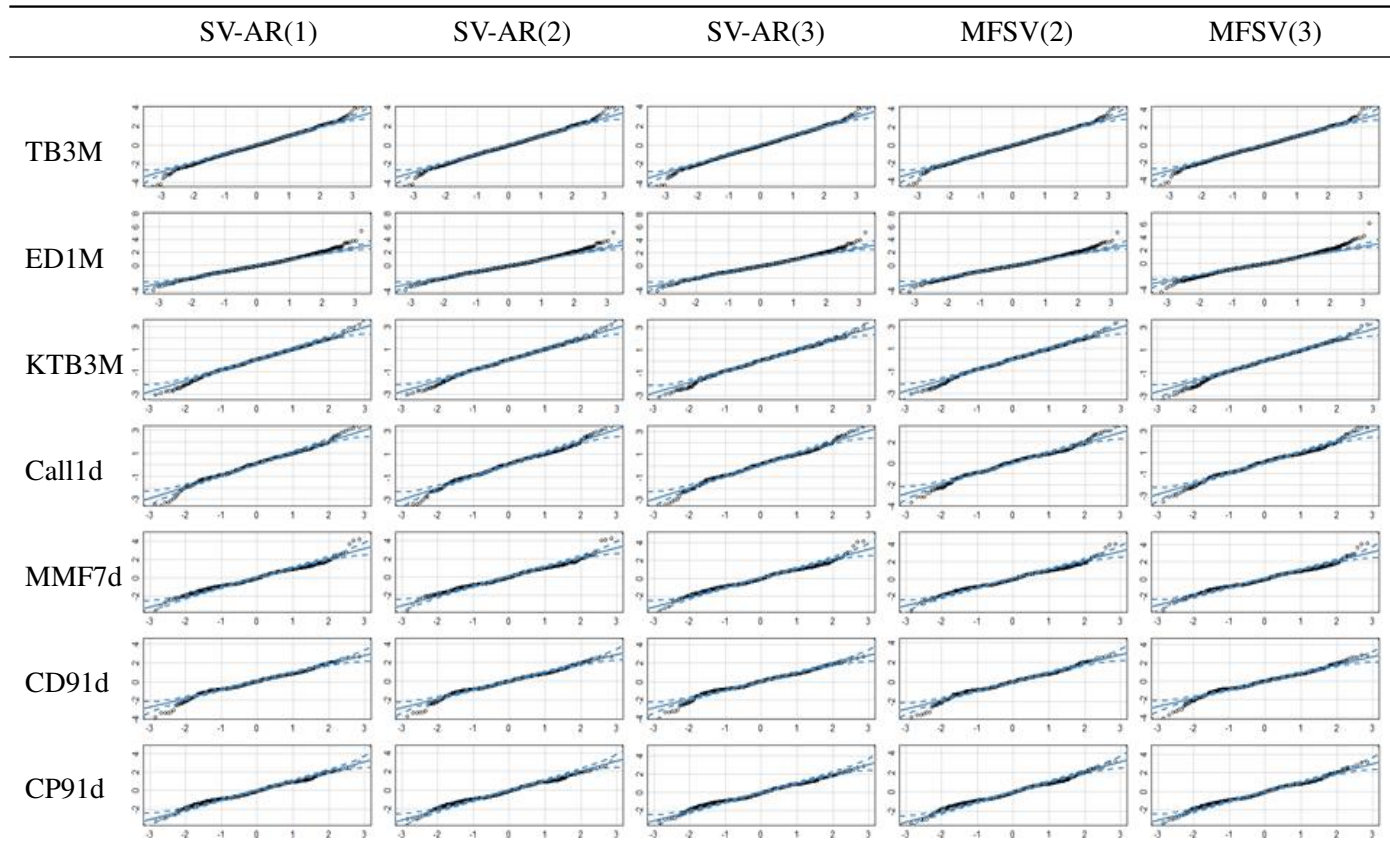
주) 표에서 파라미터 추정치 아래의 [·]안의 수치는 표준오차(standard error)를 나타내며, AIC, BIC, HQ는 각각 Akaike information criterion, Bayesian information criterion, Hannan-Quinn information criterion을 나타낸다. AIC, BIC, HQ에서 *는 이들을 기준으로 모형을 비교했을 때 가장 작은 값을 가지는 모형을 나타낸다. 그리고 JB, LB(5), ML(5), LM(5)은 각각 1기간 의사표준예측오차(pseudo standardized 1-step ahead prediction error) z_t 에 대한 자유도 2의 카이제곱분포를 따르는 Jarque-Bera 정규성검정통계량, 자유도 5의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box 검정통계량, McLeod-Li 검정통계량, Lagrange Multiplier 검정통계량이다. 각각의 검정통계량아래 (·)안의 수치는 p값(p-value)을 나타낸다.

[그림 2] PIT의 일량성 검정을 위한 히스토그램



주) 그림에는 APF를 이용하여 구한 각 모형의 $PIT(u_t)$ 의 일량성을 검정하기 위해 Diebold et al.(1998)에서 제안된 히스토그램이 제시되어 있다. 히스토그램은 [0,1]구간을 0.05 단위로 구분한 백분위수(percentile) 구간에 해당하는 확률이며, 점선은 95% 신뢰구간을 나타낸다.

[그림 3] 의사표준예측오차 정규성 검정을 위한 QQ플롯



주) 그림에는 APF를 이용하여 구한 각 모형의 PIT를 표준정규분포로 역변환하여 얻은 의사표준예측오차 z_t 의 정규성을 검정하기 위한 QQ플롯이 제시되어 있다. 그림에서 점선은 95% 신뢰구간을 나타낸다.