

Bayesian Markov Chain Monte Carlo algorithm for Feller square-root stochastic volatility models

TaeHyung Kim ^{*} Jeongmin Park [†]

Abstract We develop a new Bayesian Markov Chain Monte Carlo algorithm for Euler-discretized Feller square-root stochastic volatility models and demonstrate the performance of our algorithm through simulations and empirical analyses. Specifically, our algorithm use the Laplace approximation of the posterior density of conditional variance, which is the probability kernel of the generalized inverse gaussian distribution, derived from the joint density of return and conditional variance so that it can be easily applied to the extended stochastic volatility models with such as fat-tailed distributions or Lévy jump processes. In addition, we conduct the simulation experiment investigating and comparing the size and power of the parametric specification tests checking certain finite-dimensional moment conditions without correction for parameter estimation uncertainty with that of the nonparametric Hong and Li (2005)'s omnibus test which is not affected by parameter estimation uncertainty. The parametric and nonparametric tests are based on the probability integral transform of the prediction densities of returns obtained using auxiliary particle filter algorithms. Our experiment result shows that the classical parametric specification test may have no worse size distortion and better power than Hong and Li (2005)'s test.

Keywords Feller square-root stochastic volatility model, Markov chain Monte Carlo algorithm, probability integral transform, generalized residuals, auxiliary particle filter

JEL Classification C11, C12, C22

^{*}Seoul National University

[†]Department of Business, Hanbat National University, E-mail: jmpark@hanbat.ac.kr

Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘

김태형* 박정민†

Abstract

본 연구는 Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 새로운 베이지언 추론 알고리즘, 알고리즘의 성과에 대한 모의실험 결과, 그리고 알고리즘을 이용한 실증분석 결과를 제시한다. 본 연구의 알고리즘은 수익률과 조건부분산의 결합확률밀도함수로부터 유도되는 조건부분산의 GIG분포 확률커널을 정규분포로 근사하는 방법을 이용하므로 도약과정이나 두꺼운 꼬리를 가지는 수익률 분포를 포함하는 확장모형에도 쉽게 적용될 수 있다. 또한 본 연구의 알고리즘과 파티클필터를 통해 얻은 PIT를 이용하는 확률변동성모형 진단 통계량들의 사이즈와 검정력을 비교하는 모의실험 결과를 제시한다. 파라미터 추정에 따른 불확실성에 영향을 받지 않는 대표적인 비모수 검정인 Hong and Li (2005) 검정과 일반화된 잔차의 정규성을 이용하는 고전적 진단통계량들의 사이즈와 검정력에 대한 모의실험 결과, 고전적 진단통계량들의 사이즈왜곡이 심각하지 않을 수 있으며 검정력 또한 Hong-Li옵니버스검정(Q)보다 좋을 수 있는 것으로 나타났다.

Keywords Feller제곱근 확률변동성모형, MCMC알고리즘(Markov Chain Monte Carlo algorithm), 확률적분변환(probability integral transform), 일반화된 잔차(generalized residuals), 보조파티클필터(auxiliary particle Filter)

JEL Classification C11, C12, C22

*서울대학교

†한밭대학교 경상대학 : 대전 유성구 동서대로 125 E-mail: jmpark@hanbat.ac.kr

1. 서론

자산가격 수익률의 조건부변동성은 파생상품 가격결정, 포트폴리오 구성, 리스크관리 등에서 핵심적인 역할을 한다. 이에 따라 자산가격 수익률의 전형적인 특징인 두꺼운 꼬리(fat-tailed)를 가지는 수익률 분포, 변동성집중(volatility clustering), 레버리지효과(leverage effects), 내재변동성 미소 및 조소(implied volatility smile or smirk) 등을 포착하기 위한 다양한 이산시간 및 연속시간 변동성모형들이 제시되었다. 대표적인 이산시간 변동성모형으로는 Engle (1982), Bollerslev (1986)의 GARCH모형과 이후 제시된 다양한 GARCH모형들이 있다. GARCH모형들에서는 조건부분산이 전기의 변동성과 수익률의 확정함수(deterministic function)이므로 우도함수(likelihood function)를 이용한 추정이 용이하다는 장점이 있다. 이와 달리 확률미분방정식(stochastic differential equation)으로 설정되는 연속시간 확률변동성모형은 수학적으로 다루기 편리하므로 다양한 파생상품가격 결정모형에 이용되고 있다. 그러나 연속시간 확률변동성모형에서는 기본적으로 변동성이 미관측상태변수(latent state variables)일 뿐만 아니라 예외적인 경우를 제외한 대부분의 경우 이산시간 관측치의 전이확률밀도함수(transition probability density function)가 알려져 있지 않으므로 모형 추정이 어렵다는 단점이 있다.

1990년대 중반까지 금융시계열분석에서 주로 다루어진 확률변동성모형들은 이산시간 확률변동성모형들이다. Ghysels et al. (1996)은 이산시간 모형 관점에서 다양한 확률변동성모형에 대한 논의를 제시하고 있으며 Broto and Ruiz (2004)는 GMM(generalized method of moments), QML(quasi-maximum likelihood), II(indirect inference), MCML(Monte Carlo maximum likelihood), 베이지언 MCMC(Bayesian Markov Chain Monte Carlo) 등의 다양한 추정방법

에 대한 논의를 제시하고 있다. 이산시간 확률변동성모형 추정에는 기본적으로 미관측상태변수인 변동성을 적분소거(integrating-out)하여 비선형비정규 상태공간모형의 우도함수를 근사하는 방법(QML, MCML), 보조모형(auxiliary model)을 이용하는 방법(indirect inference), 미관측상태변수의 사후조건부확률밀도함수로부터 표본추출하는 방법(베이지언 MCMC) 등이 이용되고 있다. 이 가운데 MCML, II, 그리고 베이지언 MCMC 등의 시뮬레이션기반 추정법들은 연속시간 확률변동성모형 추정을 위한 방법론으로 발전되었다.

연속시간 확률변동성모형 가운데 이론모형과 옵션가격결정에 가장 자주 이용되는 모형들은 공통적으로 확률변동성을 Feller제곱근과정으로 설정한 모형이다. Heston (1993)에서 특성함수(characteristic function)의 푸리에역변환(inverse Fourier transform)을 이용하여 닫힌형태의 유로피언옵션 가격(closed form European option price)을 도출할 수 있음이 제시된 이후 Feller제곱근과정을 포함하는 확률변동성모형은 가장 빈번하게 이용되는 확률변동성모형 중 하나이다. 이용가능한 자료들은 이산시간 단위로 관측되는 반면, 분석모형은 연속시간모형으로 설정되므로 연속시간 확률변동성모형 추정은 이산시간 확률변동성모형보다 더 복잡하고 어려운 문제이다. 왜냐하면 이산시간 단위로 관측되는 자산가격의 전이확률밀도함수를 알 수 없거나 닫힌형태로 얻을 수 없기 때문이다. 우도함수를 이용한 모형추정을 위해서는 이러한 전이확률밀도함수를 근사할 수 있어야 한다. 옵션가격으로부터 구한 내재변동성과 같은 변동성 대응치들이 이용가능한 경우, Aït-Sahalia and Kimmel (2007), Aït-Sahalia (2008) 등은 Aït-Sahalia (2002)의 Hermite다항식을 이용한 우도함수 근사를 다변량모형으로 확장하는 추정법을 제시하였다. 그러나 모형에서 변동성이 미관측상태변수인 경우 이러한 우도함수 근사 방법을 이용하기 어렵다. 변동성을 미관측상태변수로 설정한 확률변동성모형 추정법은 크게 시뮬

레이션 기반 추정법과 특성함수(characteristic function)를 이용하는 추정법으로 구분될 수 있다. 시뮬레이션 기반 추정법으로 Gallant and Tauchen (1996), Andersen and Lund (1997), Chernov and Ghysels (2000), Andersen et al. (2002), Chernov et al. (2003) 등의 EMM(efficient method of moments), Jones (2003), Eraker et al. (2003), Eraker (2004) 등의 베이지언 MCMC를 이용한 추정법, 그리고 Durham and Gallant (2002), Christoffersen et. al (2010), Malik and Pitt (2011), Ferriani and Pastorello (2012) 등의 파티클필터(particle filter)를 이용한 SML(simulated maximum likelihood estimation) 추정법 등이 제시되었다. 특성함수를 이용한 추정법은 Duffie et al. (2000)에서 제시된 바와 같이 Feller 제곱근과정을 따르는 확률변동성모형들이 지수선형의 조건부특성함수(exponential affine conditional characteristic function)를 가진다는 점을 이용한다. Singleton (2001)은 조건부특성함수를 이용하여 얻어지는 적률조건 또는 조건부특성함수에 대한 푸리에역변환으로 얻어지는 우도함수를 이용하는 방법을, Jiang and Knight (2002)은 반복기대(iterated expectation)를 이용하여 얻은 일정 블록 수익률들의 특성함수를 이용하는 방법을, 그리고 Chacko and Viceira (2003)은 로그자산가격과 변동성의 결합조건부특성함수를 도출한 다음 변동성을 적분소거하여 얻어지는 주변특성함수를 이용하는 방법을 제시하였다. Jiang and Knight (2002)와 Chacko and Viceira (2003)의 특성함수를 이용한 추정법은 Singleton (2001)과 달리 변동성을 적분소거하기 위한 시뮬레이션이 필요하지 않다는 장점이 있지만 효율성이 다소 떨어질 수 있다는 단점이 있다. 특성함수를 이용한 추정법과 달리 시뮬레이션 기반 추정법들은 기본적으로 연속시간 확률변동성모형에 대한 이산화와 함께 시뮬레이션을 이용하여 얻은 우도함수와 적률조건을 이용하거나 미관측상태변수를 표본추출한다는 측면에서 계산상의 부담이 큰 방법들이다. 이 외에도 계산상의 부담이 적은 GMM

추정법으로 볼 수 있는 추정함수(estimating functions)를 이용한 추정법 등이 제시되었다(Bibby et al. (2010), Sørensen (2012) 등). 이 추정법에서는 GMM의 적률조건 선택과 마찬가지로 추정함수 선택에 따라 효율성의 상실이 있을 수 있다.

확률미분방정식으로 설정된 연속시간모형에 대한 베이지언 추론을 위해 Elerian et al. (2001), Eraker (2001), Roberts and Stramer (2001), Jones (2003) 등은 연속시간모형을 오일러이산화(Euler discretization)한 모형을 이용하여 관측치들 사이의 미관측치들을 표본추출하는 자료확장(data augmentation) 방법을 제시하였다. 이러한 자료확장을 이용하는 경우 확률미분방정식의 확산함수(diffusion function)와 자료확장으로 표본추출된 미관측치들 사이의 강한 상관관계로 인해 사후 표본의 수렴이 느려질 수 있다(Roberts and Stramer (2001)). 따라서 자료확장을 이용하는 추정법에서는 확산함수와 미관측치들 간의 상관관계를 제거하거나 약화시키는 방법이 필요하다. 이러한 자료확장은 이산시간 자료에 대한 연속시간모형을 추정할 때, 이산화에 따른 편의를 줄이는 데 그 목적이 있다. 그러므로 자료확장을 필요하지 않을 정도의 고빈도 자료가 이용가능하다면 자료확장을 이용할 필요는 없다. 일간자료를 분석하는 경우 이산화 편의가 무시할 수 있을 정도로 작다는 것이 알려져 있다(Eraker et al. (2003)). 이산화 편의를 완전히 제거하기 위해 Beskos et al. (2006)의 ES알고리즘(exact simulation algorithm)을 이용할 수도 있다. 그러나 ES알고리즘은 일반적인 모형에 적용하기 어렵다는 단점이 있다.

본 연구는 Feller제곱근과정을 따르는 확률변동성모형에 대한 새로운 베이지언 추론 알고리즘을 제시하고 모의실험을 통해 본 연구의 알고리즘이 Feller제곱근 확률변동성모형 추정에 효과적임을 보인다. 또한 본 연구는 파티클필터(particle filter)를 통해 얻은 PIT(probability integral transform)를 이용한 확률

변동성모형 진단에 대한 광범위한 모의실험 결과를 제시한다. 본 연구의 알고리즘은 고빈도자료가 이용가능한 경우에 Feller제곱근과정을 따르는 확률변동성모형 추정에 적용될 수 있다. 이산시간 로그확률변동성모형과 달리 Feller제곱근과정을 따르는 확률변동성모형 추정에서는 한꺼번에 변동성을 표본추출하거나 다수의 표본을 블록으로 표본추출하는 것이 불가능하므로 한 번에 하나씩 변동성을 표본추출하여야 한다. Eraker et al. (2003), Eraker (2004) 등은 조건부분산의 사후조건부확률밀도함수로부터 직접 표본을 추출하는 것이 어렵기 때문에 RWMH알고리즘(random walk Metropolis-Hasting algorithm)을 이용하였다. 그러나 RWMH알고리즘을 이용하기 위해서는 사후표본의 수렴과 표본추출의 효율성을 확보하기 위해 후보생성확률밀도함수의 분산을 적절히 조정(tuning)하는 것이 필요하다. 이러한 조정에는 분석자료와 모형의 특성에 대한 충분한 이해가 요구될 뿐만 아니라 도약과정 등을 포함하는 모형으로 확장할 때 많은 시행착오와 경험이 필요하다. 이러한 문제점을 해결하는 방법으로 Li et al. (2008)은 Gilks et al. (1994)의 ARMS(adaptive rejection Metropolis sampling)알고리즘을 이용하여 조건부분산을 표본추출하는 방법을 제시하였다. 그러나 파라미터가 아닌 조건부분산 표본추출에 적용하기에 ARMS알고리즘은 계산상의 부담이 지나치게 큰 방법이다. 왜냐하면 ARMS알고리즘을 이용하기 위해서 개별적인 조건부분산 표본추출을 위한 사전 평가점(grid points) 선정과 반복적인 사후확률밀도함수 근사점 갱신이 필요하기 때문이다. 본 연구는 이와 같은 계산상의 부담을 줄일 수 있는 새로운 조건부분산 표본추출 알고리즘을 제시한다. 본 연구의 알고리즘에서는 Feller제곱근과정 확률변동성모형의 수익률과 조건부분산의 결합확률밀도함수로부터 유도되는 조건부분산의 GIG분포(generalized inverse gaussian distribution) 확률커널(probability kernel)을 라플라스근사를 이용하여 정규분포로 근사하는

방법이 이용된다. 본 연구의 알고리즘을 이용하면 RWMH알고리즘에 비해 계산상의 부담이 그리 크지 않은 방법으로 조건부분산의 사후표본을 추출할 수 있을 뿐만 아니라 도약과정을 포함하는 확장모형의 조건부분산 또한 쉽게 사후표본추출할 수 있다. 최근 Ignatieva et al. (2015)는 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론에서 조건부분산의 강한 지속성을 고려하여 조건부분산의 사전 확률밀도함수(또는 예측확률밀도함수)를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 방법을 제시하였다. 이 경우 잘 조정된 RWMH알고리즘보다 사후 표본추출의 효율성이 떨어질 수 있다는 단점이 있다.

확률변동성모형을 베이지언 추론하는 경우, 모형 진단과 적합성 검정이 쉽지 않다. 기존 연구에서는 PIT와 그 정규분포 역변환을 이용한 모형 진단법들이 이용되고 있다. 파라미터 추정에 따른 불확실성을 반영할 수 있는 다양한 진단법들이 제시되고 있지만 이 진단법들은 계산상의 부담이 지나치게 크다는 단점을 가지고 있다. 이와 달리 GARCH모형 진단에서와 유사하게 PIT를 정규분포 역변환하여 얻은 일반화된 잔차(*generalized residuals*)의 정규성을 이용하는 검정에서는 파라미터 추정에 따른 불확실성으로 사이즈왜곡(*size distortion*)이 발생할 수 있다. 본 연구는 모의실험을 통해 파라미터 추정에 따른 불확실성에 영향을 받지 않는 대표적인 비모수 검정인 Hong and Li (2005) 검정과 일반화된 잔차의 정규성을 이용한 고전적 검정통계량들의 사이즈(*size*)와 검정력(*power*)을 비교하였다. 모의실험 결과, PIT의 일양성(*uniformity*)을 이용하는 Kolmogorov-Smirnov검정과 Cramer-von-Mise검정 등을 제외한 고전적 검정들의 사이즈왜곡 문제가 심각하지 않은 것으로 나타났다. 또한 특정 측면의 모형설정오류를 검정하는 고전적 진단통계량의 검정력이 Hong-Li옴니버스검정(Q)보다 좋을 수 있는 것으로 나타났다. 이러한 모의실험 결과는 Hong and Li (2005) 검정과 같은 비모수검정에 익숙하지 않은 경우, 일반화

된 잔차의 정규성 적률조건과 다양한 조건부 적률조건에 대한 GMM검정을 확률변동성모형 진단에 이용할 수 있음을 보여준다. 또한 이러한 결과는 일간 자료와 같은 비교적 큰 크기의 고빈도자료를 분석하는 경우 고전적 검정통계량들이 파라미터 추정에 따른 불확실성에 크게 영향을 받지 않을 수 있다는 Diebold et al. (1998)과 Berkowitz (2001)의 주장을 뒷받침해준다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 확률변동성 과정으로 이용되는 Feller제곱근과정의 특성을 간략하게 살펴보고 Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘을 제시한다. 3장에서는 파티클필터를 이용한 확률변동성모형 진단 방법과 진단 통계량들을 논의한다. 그리고 4장에서 모의실험을 통해 본 연구의 베이지언 추론 알고리즘의 성과를 살펴보고 고전적 진단 통계량들과 Hong and Li (2005) 검정의 사이즈와 검정력을 비교한다. 그리고 이와 함께 본 연구의 알고리즘과 모의실험 결과를 응용하는 실증분석 결과를 제시한다. 마지막으로 5장에 결론을 제시한다. 부록에 조건부분산의 사후조건부확률밀도함수 근사에 이용되는 GIG분포의 특성, 다양한 모형 진단 통계량들과 보조파티클필터에 대한 간략한 요약, 그리고 두꺼운 꼬리를 가지는 수익률 조건부분포를 가정하는 확률변동성모형의 파라미터에 대한 사후조건부확률밀도함수를 수록하였다.

2. Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘

2.1 Feller제곱근과정의 특성

Feller제곱근과정은 Cox et al. (1985)의 이자율 기간구조모형에서 단기이자율 확률과정으로 이용되었으며, 이후 Bailey and Stulz (1989), Heston (1993)에서는 옵션가격결정을 위한 자산 수익률의 조건부분산 확률과정으로 이용

되었다. 이는 특정조건이 충족될 경우 Feller제곱근과정이 항상 비음(nonnegative)이 되는 특징이 있기 때문이다. 지수선형(exponential affine)의 무이표채권 가격(zero-coupon bond prices)과 닫힌형태의 유로파언 옵션가격(closed-form European option prices)을 얻을 수 있으므로 Feller제곱근과정은 재무금융 분야에서 흔히 이용되는 확률과정 중 하나이다. 특히, Feller제곱근과정은 Ornstein-Uhlenbeck과정과 함께 전이확률밀도함수(transition probability density function)를 알 수 있는 소수의 확률과정 중 하나이다.

일변량 연속시간 Feller제곱근 확률과정은 다음과 같다.

$$\begin{cases} dX_t = \kappa (\theta - X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, & \forall t \\ X_0 = x_0 > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

여기에서 κ 는 평균회귀속도를, θ 는 장기평균을, σ 는 표준편차를, 그리고 W_t 는 표준위너과정(standard Wiener process)을 나타낸다. 식 (2.1)에서 $2\kappa\theta > \sigma^2$ 의 Feller 조건이 충족되는 경우 확률과정 X_t 는 항상 양(positive)이다. 그리고 $\kappa > 0$, $\theta > 0$ 인 경우 X_t 는 θ 로 평균회귀(mean-reverting)하는 특성을 가지고 있다. 식 (2.1)의 해는 다음과 같다.

$$X_s = X_t e^{-\kappa(s-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-t)}) + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} \sqrt{X_u} dW_u, \quad s > t \quad (2.2)$$

식 (2.2)를 보면 $\sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} \sqrt{X_u} dW_u$ 이 마팅게일(martingale)이므로 $s = t + 1$ 인 경우, 이산시간 관점에서 X_t 를 이분산성(heteroscedasticity)을 가지는 AR(1) 과정으로 볼 수 있다. 식 (2.2)를 이용하면, Feller제곱근과정의 조건부평균과

조건부분산을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} E[X_s|X_t] = X_t e^{-\kappa(s-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-t)}) \\ \text{Var}[X_s|X_t] = X_t \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa(s-t)} - e^{-2\kappa(s-t)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(s-t)})^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

위의 조건부분산을 유도하는 과정에서 Itô 등거리변환(Itô's isometry)과 Fubini 정리(Fubini's theorem)를 이용하면, $E[(X_s - E[X_s])^2|X_t] = \sigma^2 e^{-2\kappa s} E\left[\left(\int_t^s e^{\kappa u} \sqrt{X_u} dW_u\right)^2\right]$ 를 쉽게 구할 수 있다. 식 (2.3)을 보면, $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} E[X_s|X_t] = \theta$, $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \text{Var}[X_s|X_t] = 0$, $\lim_{\kappa \rightarrow +0} E[X_s|X_t] = X_t$, $\lim_{\kappa \rightarrow +0} \text{Var}[X_s|X_t] = \sigma^2 X_t (s-t)$ 임을 알 수 있다.

X_t 가 주어졌을 때 미래 s 시점의 X_s 로의 전이확률밀도함수는 다음과 같다 (Feller (1951), Cox et al. (1985)).

$$f(X_s, s; X_t, t) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}) \quad , \quad s > t \quad ^1 \quad (2.4)$$

여기에서 $c = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(s-t)})}$, $u = cX_t e^{-\kappa(s-t)}$, $v = cX_s$, $q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$ 이며, $I_q(\cdot)$ 은 제1종 q 차 변형베셀함수(modified Bessel function of the first kind of order)이다. 식 (2.4)는 X_t 가 다음과 같은 스케일변환된 비중심카이제곱분포(scaled noncentral chi-squared distribution)를 따름을 의미한다.

$$2cX_s \sim \chi'^2(2q + 2, 2u) \quad (2.5)$$

여기에서 $\chi'^2(d, \lambda)$ 는 자유도가 d 이고 비중심성 파라미터(noncentrality param-

¹ Cox et al. (1985)에는 전이확률밀도함수 유도에 대한 자세한 논의가 제시되어 있지 않다. Feller제곱근과정을 시간변환된 제곱베셀과정(time-changed squared Bessel process)으로 나타낼 수 있음을 이용하여 Feller제곱근과정의 전이확률밀도함수를 도출할 수 있다. 이에 대한 보다 자세한 논의는 Gullisashvili (2012)의 1장, Jeanblanc et al. (2009)의 6장과 그 참고문헌을 참고할 수 있다.

eter)가 λ 인 비중심카이제곱분포를 나타낸다.

확률과정이 안정적(stationary)인 경우, 확률과정의 주변확률밀도함수 (marginal probability density function)는 전이확률밀도함수로부터 유도될 수 있다. 즉, $f(X_t = x_t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(X_t = x_t | X_{t-\tau} = x_{t-\tau})$ 를 이용하여 주변확률밀도 함수를 유도할 수 있다. $\kappa > 0$ 이면 Feller제곱근과정은 안정적인 확률과정이다. 그러므로 $f(X_t = x_t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(X_t = x_t | X_{t-\tau} = x_{t-\tau})$ 를 이용하여 식 (2.4)의 전이확률밀도함수로부터 주변확률밀도함수를 유도할 수 있다. 이와 같이 얻어지는 주변확률밀도함수는 다음과 같은 감마분포(gamma distribution)를 따른다.

$$f(X_s; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} X_s^{\alpha-1} e^{-\beta X_s} \quad (2.6)$$

여기에서 $\alpha = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$, $\beta = \frac{2\kappa}{\sigma^2}$ 이며, $\Gamma(z) = \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy$, $z > 0$ 이다. 감마분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산은 각각 $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta^2}$ 이므로 Feller제곱근과정의 비조건부 평균과 분산(unconditional mean and variance)은 각각 θ , $\frac{\theta\sigma^2}{\kappa}$ 이다. 식 (2.3)을 통해서도 이러한 결과를 확인할 수 있다. 식 (2.3)에서 $\lim_{s \rightarrow \infty} E[X_s | X_t] = \theta$, $\lim_{s \rightarrow \infty} Var[X_s | X_t] = \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}$ 으로 감마분포의 비조건부 평균 및 분산과 동일함을 알 수 있다.

2.2 Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론

Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론에서 가장 어려운 부분은 미관측상태변수인 조건부분산에 대한 사후표본추출이다. 조건부분산의 사후표본을 쉽게 생성할 수 있다면, 기존 연구에서 제시된 알고리즘을 이용하여 포아송도약(poisson jump)과 같은 Lévy도약(Lévy jump) 뿐만 아니라 두꺼운 꼬리를 가지는 수익률분포를 포함하는 확률변동성모형 또한 쉽게 추정할 수

있다. 따라서 본 절에서는 조건부분산 사후표본 생성에 초점을 두고 기본적인 Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론을 논의하기로 한다.

2.2.1 Feller제곱근 확률변동성모형

로그자산가격을 $\log S_t$, 조건부분산을 V_t 라 하면, 실질측도 (physical measure)하의 연속시간 Feller제곱근 확률변동성모형을 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} d\log S_t = \alpha dt + \sqrt{V_t} dW_t^S \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^V \\ V_0 \sim G\left(\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \frac{2\kappa}{\sigma^2}\right) \end{cases} \quad (2.7)$$

여기에서 α 는 로그자산가격의 순간평균수익률, $\kappa > 0$ 는 평균회귀속도, $\theta > 0$ 는 조건부분산 V_t 의 장기평균, σ 는 조건부분산의 표준편차를 나타낸다. W_t^S 와 W_t^V 는 $E[dW_t^S dW_t^V] = \rho dt$ 인 표준위너과정이다. 앞서 살펴보았듯이, Feller제곱근과정을 따르는 의 비조건부분포를 나타내는 초기치에 관한 설정은 연속

² 옵션가격을 다루는 Heston (1993), Bates (1996), Bakshi et al. (1997), Duffie et al. (2000) 등에서는 확률변동성모형을 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{cases} dS_t = \alpha S_t dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t^S \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^V \end{cases}$$

위의 모형에 Itô보조정리(Itô's lemma)를 적용하면 다음과 같은 로그자산가격으로 설정된 확률변동성모형을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} d\log S_t = (\alpha - \frac{1}{2}V_t)dt + \sqrt{V_t} dW_t^S \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^V \end{cases}$$

위 모형의 로그자산가격 추세함수에는 명시적으로 조건부분산이 포함되어 있다. 그러나 대부분의 실증분석에서는 로그자산가격 추세함수에 포함된 조건부분산이 유의하지 않으므로 옵션가격을 포함하지 않고 자산가격만을 분석하는 경우 수익률방정식의 추세함수에 조건부분산을 포함시키지 않는 경향이 있다. 본 연구에서는 이러한 경향을 반영하여 식 (2.1)과 같이 확률변동성모형을 설정하였다. 본문을 통해서 알 수 있겠지만, 로그자산가격 추세함수에 조건부분산이 포함되더라도 수식의 일부 조정을 통해서 확률변동성모형 추정에 본 연구에서 제시하는 MCMC알고리즘을 적용할 수 있다.

시간모형에서는 불필요한(redundant) 설정이다. 하지만 오일러이산화를 이용하여 확률과정을 근사하는 경우, 오일러이산화한 확률과정의 비조건부분포는 Feller제곱근과정의 비조건부분포인 감마분포가 아닐 뿐만 아니라 이산화한 확률과정의 극한과정 또한 Feller제곱근과정으로 수렴하지 않는다. 극한과정이 Feller제곱근과정으로 수렴하는 이산시간 확률과정으로는 Gouriéroux and Jasiak (2006), Darolles et al. (2006) 등에서 제시된 ARG과정(autoregressive gamma process)이 있다. 그러나 이산시간 확률변동성모형에서 분산과정을 ARG과정으로 설정하면 $\rho \neq 0$ 인 레버리지효과를 포착할 수 없다는 단점이 있다. 대부분의 기존 연구들에서는 모형추정에 오일러이산화를 이용하면서도 이산화한 확률과정의 비조건부분포가 감마분포가 아니라는 점을 명시적으로 고려하지 않고 있다. 본 연구에서 제안하는 베이지언 MCMC알고리즘 역시 오일러이산화한 모형을 분석하지만 이산화한 확률과정의 비조건부분포가 항상 감마분포가 되도록 초기치 V_0 의 분포를 설정하였다.³ 이와 같은 확률변동성모형 조건부분산의 초기치 설정은 베이지언 모형 비교를 위한 로그주변우도(log-marginal-likelihood) 추정과 모형진단을 위한 파티클필터에서도 중요하게 이용된다.

연속시간모형의 파라미터와 이산시간모형의 파라미터와의 관계를 보다 명확하게 하기 위해 이하에서 오일러이산화모형의 유도과정을 자세하게 논의하기로 한다. 식 (2.7)의 연속시간 확률미분방정식으로 설정된 확률변동성모형을 Δ 시간간격으로 오일러이산화하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \log S_{(t+1)\Delta} - \log S_{t\Delta} = \alpha\Delta + \sqrt{V_{t\Delta}}\sqrt{\Delta}\varepsilon_{(t+1)\Delta}^S \\ V_{(t+1)\Delta} - V_{t\Delta} = \kappa(\theta - V_{t\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{V_{t\Delta}}\sqrt{\Delta}\varepsilon_{(t+1)\Delta}^V \end{cases} \quad (2.8)$$

³ 고전적인 접근법에서 최우추정법을 이용하는 경우 점근적으로 초기치의 영향을 무시할 수 있다.

여기에서 $\varepsilon_{(t+1)\Delta}^S$ 와 $\varepsilon_{(t+1)\Delta}^V$ 는 $\text{corr}(\varepsilon_{(t+1)\Delta}^S, \varepsilon_{(t+1)\Delta}^V) = \rho$ 인 표준정규분포를 따르는 확률변수이다. 식 (2.8)의 오일러이산화모형에서 조건부분산방정식은 시간간격에서의 연율표시 조건부분산(annualized conditional variance)의 동학이다. 예를 들어, $\Delta = 1/252$ 이면 식 (2.8)의 수익률방정식은 일별수익률을, 조건부분산 방정식은 연율표시 조건부분산을 나타내는 부자연스러운 모형설정이 된다. 기존 연구들에서는 대부분 식 (2.8)의 이산화모형을 분석하였다. 분석자료에 옵션가격이 포함된 경우 식 (2.8)이 편리할 수 있지만, 그렇지 않은 경우 조건부분산 방정식을 이산화 시간간격 Δ 단위표시로 변환하는 것이 분석과 해석 그리고 모형을 다루는데 보다 편리하다. 식 (2.8)에서 Δ 단위표시 조건부분산은 $V_{t\Delta}\Delta$ 이다. $V_{t\Delta}\Delta = v_t$ 라 하면, 식 (2.8)의 Δ 단위표시 이산화모형을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} \log S_{(t+1)\Delta} - \log S_{t\Delta} = \alpha\Delta + \sqrt{v_t}\varepsilon_{(t+1)\Delta}^S \\ v_{t+1} - v_t = \kappa\Delta(\theta\Delta - v_t) + \sigma\Delta\varepsilon_{(t+1)\Delta}^V \end{cases} \quad (2.9)$$

그리고 V_t 의 비조건부분포를 나타내는 초기치 V_0 에 관한 설정을 감마분포의 스케일링에 관한 성질, 즉 $Z \sim G(a, b)$ 이면, $c > 0$, $cZ \sim G(a, b/c)$ 임을 이용하여 Δ 단위표시 비조건부분산 $V_0\Delta$ 의 분포 $v_0 \sim G(2\kappa\theta/\sigma^2, 2\kappa/(\sigma^2\Delta))$ 로 변환할 수 있다. 그리고 $\mu^s = \alpha\Delta$, $\mu = \theta\Delta$, $\phi = 1 - \kappa\Delta$, $\sigma_\eta = \sigma\Delta$, $\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{(t+1)\Delta}^S$, $\eta_{t+1} = \varepsilon_{(t+1)\Delta}^V$ 라 하면, 식 (2.7)의 연속시간 확률변동성모형을 다음과 같은 시간간격 단위표시 오일러이산화모형으로 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} r_{t+1} = \mu^s + \sqrt{v_t}\varepsilon_{t+1} \\ v_{t+1} = \mu + \phi(v_t - \mu) + \sigma_\eta\sqrt{v_t}\eta_{t+1} \quad , \quad v_{t+1} > 0 \\ v_0 \sim G\left(\frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}, \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2}\right) \quad , \quad \text{corr}(\varepsilon_{t+1}, \eta_{t+1}) = \rho \end{cases} \quad (2.10)$$

일간자료와 같은 이산자료를 분석하는 경우, 식 (2.10)의 오일러이산화모형은 $t = 0$ 시점부터 조건부분산이 시작되는 것과 $t + 1$ 시점 수익률의 조건부분산이 v_t 인 것이 다소 어색하다. 이를 고려하여 다음과 같은 다루기 편리하고 친숙한 형태로 모형을 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} r_t = \mu^s + \sqrt{v_t} \varepsilon_t \\ v_{t+1} = \mu + \phi(v_t - \mu) + \sigma_\eta \sqrt{v_t} \eta_t, & v_{t+1} > 0 \\ v_1 \sim G\left(\frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}, \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2}\right) & , \quad \text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) = \rho \end{cases} \quad (2.11)$$

여기에서 $\mu^s, \mu, \phi, \sigma_\eta$ 는 각각 Δ 시간단위 평균수익률, 조건부분산의 평균, 지속성, 변동성(표준편차)을 나타내며, ρ 는 레버지리효과를 설명하는 ε_t 와 η_t 의 상관계수를 나타낸다. 조건부분산의 안정성과 비조건부분포의 존재를 위해 $|\phi| < 1$ 의 제약이 필요하다. 기존 연구에서와 달리 식 (2.11)은 이산화모형이면서도 조건부분산의 비조건부분포가 연속시간모형에서와 같이 조건부분산 방정식에 포함된 파라미터들의 함수로 표시되는 감마분포를 따르는 것으로 설정된 것이다. Δ 가 무한히 작은 오일러이산화로 Feller제곱근과정을 따르는 조건부분산의 전이확률밀도함수를 근사하더라도 근사한 조건부분산과정의 비조건부분포는 연속시간모형의 비조건부분포와 같지 않다. 그러므로 의 비조건부분포를 명시적으로 고려하는 것이 필요하다.

식 (2.11)에서 연속시간모형의 Feller조건에 대응되는 조건은 $2(1 - \phi)\mu \geq \sigma_\eta^2$ 이다. 이산화모형에서 주의할 점은 Feller조건이 충족되어도 조건부분산이 음이 될 수 있으며, Feller조건이 충족되지 않아도 조건부분산이 양이 될 수 있다는 것이다.⁴ 따라서 Feller조건과 관계없이 $\forall t, v_t > 0$ 의 제약을 명시적으로

⁴ Spreij et al. (2011)은 거시금융 이자율 기간구조모형 분석에서 이산화모형에 Feller조건을 부과할 경우 경제적으로 무의미한 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 본 연구에서는 이와 같은 점들을 고려하여 식 (2.11)의 이산화모형에 대한 베이지언 추론에서 Feller조건에

부과할 필요가 있다. 또한 조건부분산의 초기치 v_1 이 존재하기 위해서는 항상 $|\phi| < 1$ 의 안정성조건이 충족되어야 한다. Eraker et al. (2003), Johannes et al. (2009)의 모의실험 결과에 따르면, 일간자료를 분석하는 경우 오일러이산화에 따른 편의(discretization bias)가 무시할 수 있을 정도로 작다. 따라서 본 연구에서는 일간자료 분석을 염두에 두고 식 (2.11)의 오일러이산화 모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘을 제시하고자 한다.

2.2.2 베이지언 추론 알고리즘

(1) 사전확률분포

식 (2.11)의 모형에 대한 베이지언 추론을 위해서는 파라미터 $\{\mu^s, \mu, \phi, \sigma_\eta^2, \rho\}$ 의 사전확률밀도함수를 설정하여야 한다. $\{\mu^s, \mu, \phi\}$ 의 사전확률밀도함수를 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} \pi(\mu^s) = N(\underline{b}_{\mu^s}, \underline{B}_{\mu^s}) \\ \pi(\mu) = TN_{c(0, \infty)}(\underline{b}_\mu, \underline{B}_\mu) \\ \pi(\phi) = TN_{(-1, 1)}(\underline{b}_\phi, \underline{B}_\phi) \end{cases} \quad (2.12)$$

여기에서 $N(a, b)$ 와 $TN_{(c, d)}(a, b)$ 는 각각 평균이 a 이고 분산이 b 인 정규분포와 하한과 상한이 각각 c 와 d 인 절단정규분포(truncated normal distribution)를 나타낸다. μ 와 ϕ 의 사전확률밀도함수에 부과된 $\{\mu > 0, |\phi| < 1\}$ 의 제약은 조건부분산의 장기평균이 항상 양이라는 것과 함께 조건부분산과정의 안정성 그리고 비조건부분포 존재를 위해 필요하다. $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 는 $(\epsilon_t, \tilde{\eta}_t = \sigma_\eta \eta_t)$ 의 제약하의 공분산행렬에 포함된 파라미터이다. Jacquier et al. (2004)는 식 (2.11)와

대응되는 조건 $2(1 - \phi)\mu \geq \sigma_\eta^2$ 을 부과하지 않고 분석하였다.

유사한 이산시간 로그확률변동성모형에서 제약하의 공분산행렬을 표본추출하는 방법을 제시하였다. $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 를 표본추출하기 위해 Jacquier et al. (2004)는 $\tilde{\eta}_t = \psi \varepsilon_t + \omega e_t$, $e_t \sim N(0, 1)$ 의 회귀식을 이용하였다. 이 회귀식에서 $\psi = \rho \sigma_\eta$, $\omega^2 = (1 - \rho^2) \sigma_\eta^2$ 의 일대일 대응관계가 성립하므로 $\{\psi, \omega^2\}$ 을 표본추출한 후 역변환하는 방법으로 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 를 표본추출할 수 있다. Jacquier et al. (2004)의 알고리즘을 이용하기 위해 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 의 사전확률밀도함수 대신 $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사전확률밀도함수를 설정하기로 한다. $\tilde{\eta}_t = \psi \varepsilon_t + \omega e_t$ 에 포함된 파라미터 $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사전확률밀도함수로 다음과 같은 정규-역감마 사전확률밀도함수(normal-inverse gamma prior)를 설정한다.

$$\begin{cases} \pi(\psi, \omega^2) = \pi(\psi|\omega^2)\pi(\omega^2) \\ \pi(\psi|\omega^2) = N(0, \omega^2 \underline{B}_\psi) \quad , \quad \pi(\omega^2) = IG(d_0/2, s_0/2) \end{cases} \quad (2.13)$$

여기에서 $IG(\alpha, \beta)$ 는 형태파라미터(shape parameter)가 α 이고 스케일파라미터(scale parameter)가 β 인 역감마분포⁵를 나타낸다. 식 (2.13)의 사전확률밀도함수 설정은 $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사후표본 또는 후보표본을 한꺼번에 표본추출할 수 있는 장점을 가지고 있다. 식 (2.13)의 사전확률밀도함수를 이용하는 경우 $|\rho|$ 가 1에 가까운 극단적인 상관관계를 포착하는데 어려움이 있다.(Jacquier et al. (2004))

(2) Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 사후표본 추출

베이지정리를 이용하여 식 (2.12)와 식 (2.13)의 사전확률밀도함수와 식 (2.11) 모형의 우도함수를 결합하면 다음과 같은 $\Psi = \{\mu^s, \mu, \phi, \psi, \omega^2\}$ 와 $\{v_t\}_{t=1}^T$

⁵ 본 논문에서는 다음과 같은 역감마분포의 확률커널을 가정한다.

$$p(x; \alpha, \beta) \propto x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x)$$

의 사후결합확률밀도함수의 확률커널을 얻을 수 있다.

$$\pi\left(\Psi, \{v_t\}_{t=1}^T \mid \{r_t\}\right) \propto p(v_1 \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(r_t, v_{t+1} \mid v_t, \Psi) \right\} p(r_T \mid v_T, \mu^s) \pi(\Psi) \quad (2.14)$$

여기에서 $\pi(\Psi) = \pi(\mu^s)\pi(\mu)\pi(\phi)\pi(\psi, \omega^2)$ 이다. 식 (2.14)로부터 한꺼번에 Ψ 와 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 을 표본추출하는 것이 불가능하다. 그러므로 식 (2.11)의 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론은 다음과 같은 블록으로 구성된 사후조건부확률분포부터 순차적으로 반복하여 표본을 추출하는 절차로 구성된다.

- (i) $\pi\left(\{v_t\}_{t=1}^T \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \Psi\right)$
- (ii) $\pi\left(\mu^s \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\mu^s}\right)$
- (iii) $\pi\left(\mu \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\mu}\right)$
- (iv) $\pi\left(\phi \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\phi}\right)$
- (v) $\pi\left(\psi, \omega^2 \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\{\psi, \omega^2\}}\right)$

(2.1) 조건부분산 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 사후표본 생성

파라미터 Ψ 가 주어졌을 때, 조건부분산 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi\left(\{v_t\}_{t=1}^T \mid \{r_t\}_{t=1}^T, \Psi\right) \propto p(v_1 \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(r_t, v_{t+1} \mid v_t, \Psi) \right\} p(r_T \mid v_T, \mu^s) \quad (2.15)$$

식 (2.15)로부터 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 를 한꺼번에 표본추출하는 것이 불가능하다. 그러므로 본 연구에서는 한 번에 하나씩 $\{v_t\}_{t=1}^T$ 를 표본추출하는 방법을 이용하기로 한

다. 이와 같은 방법으로 사후표본추출할 때, $t = 1, t = 2, \dots, T-1$, 그리고 $t = T$ 시점을 구분하여 사후조건부확률밀도함수를 유도할 필요가 있다.

■ $t = 1$

$t = 1$ 시점의 조건부분산 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(v_1 | r_1, v_2, \Psi) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) p(r_1 | v_1, \mu^s) p(v_2 | v_1, r_1, \Psi) \quad (2.16)$$

식 (2.16)의 우변에 포함된 확률밀도함수들의 확률커널은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) &= G(\alpha, \beta) \propto v_1^{\alpha-1} \exp(-\beta v_1), \alpha = \frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}, \beta = \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2} \\ p(r_1 | v_1, \mu^s) &= v_1^{-0.5} \exp\left\{-\frac{(r_1 - \mu^s)^2}{2v_1}\right\} \\ p(v_2 | v_1, r_1, \Psi) &\propto v_1^{-0.5} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{(v_2 - \mu(1-\phi) - \rho\sigma_\eta(r_1 - \mu^s))^2}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2} \frac{1}{v_1} + \frac{\phi^2}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2} \right)\right\} \end{aligned}$$

이들을 결합하면 다음과 같은 GIG분포⁶의 확률커널을 얻을 수 있다.

$$\pi(v_1 | r_1, v_2, \Psi) \propto GIG(\bar{\lambda}, \bar{\chi}, \bar{\psi}) \propto v_1^{\bar{\lambda}-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\chi}}{v_1} + \bar{\psi} v_1 \right)\right) \quad (2.17)$$

여기에서 $\bar{\lambda} = \alpha - 1$, $\bar{\chi} = (r_1 - \mu^s)^2 + \frac{(v_2 - \mu(1-\phi) - \rho\sigma_\eta(r_1 - \mu^s))^2}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2}$, $\bar{\psi} = 2\beta + \frac{\phi^2}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2}$ 이다. 따라서 v_1 의 사후표본을 GIG분포로부터 직접 생성할 수 있다. 본 연구에서는 Devroye (2014)의 알고리즘을 이용하였다.

⁶ GIG분포의 특성은 부록에 간략하게 수록되어 있다.

■ $t = 2, \dots, T-1$

v_1 과 달리 $t = 2, \dots, T-1$ 시점의 조건부분산 $\{v_t\}_{t=1}^{T-1}$ 은 사후조건부확률분포로부터 직접 생성할 수 없지만 MH알고리즘으로 $\{v_t\}_{t=1}^{T-1}$ 를 표본추출할 수 있다. 식 (2.15)로부터 다음과 같은 $t = 2, \dots, T-1$ 시점의 조건부분산 확률커널을 얻을 수 있다.

$$\pi(v_t \mid r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}, \Psi) \propto p(r_t, v_{t+1} \mid v_t, \Psi) p(r_{t-1}, v_t \mid v_{t-1}, \Psi) \quad (2.18)$$

식 (2.18)에서 우변에 포함된 각각의 확률밀도함수들은 다음과 같이 GIG분포와 정규분포의 확률커널로 축약될 수 있다.

$$p(r_t, v_{t+1} \mid v_t, \Psi) \propto \quad (2.19)$$

$$v_t^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\underbrace{\left((r_t - \mu^s)^2 + \frac{(v_{t+1} - \mu(1-\phi) - \rho\sigma_\eta(r_t - \mu^s))^2}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2} \right)}_{\chi} \left(\frac{1}{v_t} \right) + \underbrace{\frac{\psi}{\phi^2}}_{\psi} \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2} v_t \right] \right\}$$

$$p(r_{t-1}, v_t \mid v_{t-1}, \Psi) \propto N\left(\mu + \phi(v_{t-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta(r_{t-1} - \mu^s), (1-\rho^2)v_{t-1}\sigma_\eta^2\right)$$

그리고 $GIG(\underline{\lambda}, \underline{\chi}, \underline{\psi})$ 분포의 확률커널로 볼 수 있는 $p(r_t, v_{t+1} \mid v_t, \Psi)$ 를 $GIG(\underline{\lambda}, \underline{\chi}, \underline{\psi})$

분포의 최빈값에서 라플라스근사(Laplace's approximations at the mode of GIG

$(\underline{\lambda}, \underline{\chi}, \underline{\psi})$ 를 이용하여 정규분포로 근사할 수 있다. 분포의 최빈값

$m_t = \frac{(\underline{\lambda}-1) + \sqrt{(\underline{\lambda}-1)^2 + \underline{\chi}\underline{\psi}}}{\underline{\psi}}$ 에서 $p(r_t, v_{t+1} \mid v_t, \Psi)$ 를 정규분포로 근사하면 다음과

같은 정규분포의 확률커널을 얻을 수 있다.

$$p(r_t, v_{t+1} \mid v_t, \Psi) \approx N(\hat{m}_t, -H_t^{-1}) \quad , \quad H_t = \frac{\partial^2 \ln p_{GIG}(v_t \mid \underline{\lambda}, \underline{\chi}, \underline{\psi})}{\partial^2 v_t^2} \bigg|_{v_t = \hat{m}_t} \quad (2.20)$$

합성곱의 법칙(convolution rule)을 이용하여 식 (2.20)의 확률커널을 $p(r_{t-1}, v_t | v_{t-1}, \Psi)$ 과 결합한 다음 $v_t > 0$ 의 제약을 부과하면, 다음과 같은 후보생성확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$g(v_t) = TN_{(0, \infty)}(\hat{v}_t, V_{\hat{v}_t}) \quad (2.21)$$

$$V_{\hat{v}_t} = \left(-H_t + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2 v_{t-1}} \right)^{-1}, \quad \hat{v}_t = V_{\hat{v}_t} \left(-H_t \hat{m}_t + \frac{\mu + \phi(v_{t-1} - \mu) + \rho \sigma_\eta (r_{t-1} - \mu^s)}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2 v_{t-1}} \right)$$

식 (2.20)과 식 (2.21)과 같이 목표확률밀도함수(target posterior probability density)를 근사하는 후보생성확률밀도함수를 이용할 경우 후보생성확률밀도함수 $g(v_t)$ 가 $\pi(v_t | r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}, \Psi)$ 보다 작은 경우(not dominating)가 발생할 수 있다. Tierney (1994), Chib and Greenberg (1995)는 표본추출의 효율성을 높이기 위해 MH알고리즘과 기각표본추출법(acceptance-rejection sampling)을 결합하는 MH-AR알고리즘(Metropolis-Hastings acceptance-rejection sampling algorithm)을 제안하였다. MH-AR알고리즘은 Shephard and Pitt (1997), Jacquier et al. (2004), Watanabe (2000) 등에서 로그조건부분산을 생성하는 방법으로 이용된 바 있다. 본 연구에서도 의 사후표본 생성을 위해 MH-AR알고리즘을 이용한다. MH-AR알고리즘은 기각표본추출법으로 생성한 후보표본을 MH채택확률(Metropolis-Hasting acceptance probability)로 채택하는 알고리즘이다. 먼저 식 (2.21)를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 기각표본추출법으로 후보표본 v_t^* 생성한다. 이 때 채택확률은 $\alpha_{AR}(v_t^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_t^* | r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}, \Psi)}{g(v_t^*)} s \right\}$ 이다. 그리고 다음과 같은 MH채택확률로 v_t^* 를 채택한다.

$$\alpha_{ARMH}(v_t^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_t^* | r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}, \Psi) \min \{ \pi(v_t | r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}, \Psi), g(v_t) \}}{\pi(v_t | r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}, \Psi) \min \{ \pi(v_t^* | r_t, r_{t-1}, v_{t+1}, v_{t-1}, \Psi), g(v_t^*) \}} \right\} \quad (2.22)$$

MH-AR알고리즘은 기각표본추출법으로 후보를 생성하므로 순수한 MH알고

리듬보다 표본추출 시간이 더 소요될 수 있지만 더 효율적인 방법이다. 이와 달리 식 (2.21)을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 순수한 MH알고리즘을 이용하는 방법도 이론적으로 문제가 없다.

■ $t = T$

v_T 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(v_T | v_{T-1}, r_T, r_{T-1}, \Psi) \propto p(r_T | v_T, \mu^s) p(r_{T-1}, v_T | v_{T-1}, \Psi) \quad (2.23)$$

식 (2.19)에서와 같이 식 (2.23)의 우변 두 번째 항은 다음과 같은 정규분포의 확률커널이다.

$$p(r_{T-1}, v_T | v_{T-1}, \Psi) \propto N(\mu + \phi(v_{T-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta(r_{T-1} - \mu^s), (1 - \rho^2)\sigma_\eta^2 v_{T-1}) \quad (2.24)$$

$t = 2, \dots, T-1$ 에서와 같이 MH-AR알고리즘을 이용하여 v_T 를 표본추출하기 위해서는 다음과 같이 $p(r_T | v_T, \mu^s)$ 를 v_T 의 정규분포확률커널로 근사하는 것이 필요하다.

$$p(r_T | v_T, \mu^s) \propto v_T^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(r_T - \mu^s)^2}{v_T} \right\} \quad (2.25)$$

이를 위해서 1단계-NR알고리즘(1-step Newton-Raphson algorithm)을 이용하여 식 (2.25)를 정규분포로 근사할 수 있다⁷ 1단계-NR알고리즘을 이용하기 위

⁷ 최빈값인 $\check{v}_T = (r_T - \mu^s)^2$ 에서 $\ln p(r_T | v_T)$ 에 대한 라플라스근사를 이용하는 알고리즘을 이용할 수도 있다. 이 경우 문제가 될 수 있는 부분은 $r_T - \mu^s = 0$ 인 경우, 로그우도함수와 12계 도함수가 정의되지 않는 점이다. 본문의 1단계-NR알고리즘을 이용하는 방법은 $r_T - \mu^s = 0$ 인 경우를 고려하여 도함수가 정의되지 않는 경우를 회피하는 일반적인 방법으로 제시된 것이다. 그리고 연속시간 수익률방정식의 추세항에 조건부분산이 포함되는

한 후보점으로 $T-1$ 기의 예측치 $v_{T|T-1} = \mu + \phi(v_{T-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta(r_{T-1} - \mu^s)$ 를 이용할 수 있다. $\ln p(r_T|v_T)$ 에 대해 $v_{T|T-1}$ 에서 1단계-NR알고리즘을 적용하면, 식 (2.25)를 다음과 같은 정규분포 커널로 근사할 수 있다.

$$p(r_T | v_T, \mu^s) \simeq N(\hat{v}_T, -H_T^{-1}) \quad (2.26)$$

$$\hat{v}_T = v_{T|T-1} - \frac{\partial \ln p(r_T|v_T)/\partial v_T}{\partial^2 \ln p(r_T|v_T)/\partial v_T^2} \Big|_{v_T=v_{T|T-1}}, \quad H_T = \frac{\partial^2 \ln p(r_T|v_T)}{\partial v_T^2} \Big|_{v_T=v_{T|T-1}}$$

식 (2.24)와 식 (2.26)을 결합한 후 $v_T > 0$ 의 제약을 부과하면, 다음과 같은 후보생성확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$g(v_T) = TN_{(0,\infty)}(\hat{v}_T, V_{\hat{v}_T}) \quad (2.27)$$

$$V_{\hat{v}_T} = \left(-H_T + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2} \right), \quad \hat{v}_T = V_{\hat{v}_T} \left(-H_T \hat{v}_T + \frac{\mu + \phi(v_{T-1} - \mu) + \rho\sigma_\eta(r_{T-1} - \mu^s)}{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2} \right)$$

$t = 2, \dots, T-1$ 기에서와 같이 식 (2.27)을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH-AR알고리즘으로 v_T 를 표본추출할 수 있다. MH-AR알고리즘에 포함된 기각표본추출법의 채택확률과 MH채택확률은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \alpha_{AR}(v_T^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_T^*|r_T, r_{t-1}, v_{T-1}, \Psi)}{g(v_T^*)} \right\} \\ \alpha_{ARMH}(v_T, v_T^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v_T^*|r_T, r_{t-1}, v_{T-1}, \Psi) \min\{\pi(v_T|r_T, r_{t-1}, v_{T-1}, \Psi), g(v_T)\}}{\pi(v_T|r_T, r_{t-1}, v_{T-1}, \Psi) \min\{\pi(v_T^*|r_T, r_{t-1}, v_{T-1}, \Psi), g(v_T^*)\}} \right\} \end{cases} \quad (2.28)$$

식 (2.26)의 1단계-NR알고리즘을 이용한 근사에서 주의할 점이 있다. $\ln p(r_T|v_T)$ 가 v_T 에 대하여 전역적으로 로그오목(globally log-concave)이 아니므로 식

일반적인 확률변동성모형의 경우에는 1단계-NR알고리즘을 이용할 필요 없이 GIG분포의 최빈값에서 라플라스근사하는 방법을 이용할 수 있다. 그러나 이 경우에도 $r_T - \mu^s = 0$ 이면 라플라스근사를 이용할 수 없다. 본 연구에서 제시하는 알고리즘을 프로그래밍할 때, $r_T - \mu^s = 0$ 이 되는 경우를 고려하여 프로그램을 작성할 수도 있다.

(2.20)에서 $H_T \geq 0$ 인 경우가 발생할 수 있다. 이 경우는 후보점 $v_{T|T-1}$ 에서 $\ln p(r_T|v_T)$ 가 로그볼록(log-convex)이므로 1단계-NR알고리즘을 이용한 근사를 적용할 수 없다. 이 경우 1계도함수만을 이용하는 1단계-BHHH알고리즘(Berndt-Hall-Hall-Hausman algorithm)을 이용할 수 있다. 1단계-BHHH알고리즘을 이용하는 경우 식 (2.20)에 포함된 $\frac{\partial^2 \ln p(r_T|v_T)}{\partial v_T^2} \Big|_{v_T=v_{T|T-1}}$ 은 $-\left(\frac{\partial \ln p(r_T|v_T)}{\partial v_T}\right)^2 \Big|_{v_T=v_{T|T-1}}$ 로 대체된다. 물론 이 경우 근사의 정도가 좋지 않을 수 있다. 따라서 MH-AR알고리즘을 이용한 표본추출에 시간이 소요될 수 있고 사후표본 채택률 또한 좋지 않을 수 있다⁸.

(2.2) 파라미터 $\Psi = \{\mu^s, \mu, \phi, \psi, \omega^2\}$ 의 사후표본추출

조건부분산이 주어졌을 때 파라미터를 사후표본추출하는 것은 비교적 쉽다. $\{v_t\}_{t=1}^T$ 가 주어지면 식 (2.15)로부터 다음과 같은 μ^s 의 사후조건부확률밀도 함수를 유도할 수 있다.

$$\pi(\mu^s | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\mu^s}) \propto \left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(r_t, v_{t+1} | v_t, \mu^s) \right\} p(r_T | v_T, \mu^s) \pi(\mu^s) \quad (2.29)$$

그러므로 μ^s 의 사후표본추출은 다음과 같은 정규분포로부터 표본을 추출하는 것이 된다.

$$\mu^s | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\mu^s} \sim \left(\bar{B}_{\mu^s} \left(\underline{B}_{\mu^s} \underline{b}_{\mu^s} + \left(\sum_{t=1}^{T-1} \frac{r_t - \rho \eta_t^*}{(1 - \rho^2) v_t} + \frac{r_T}{v_T} \right) \right), \bar{B}_{\mu^s} \right) \quad (2.30)$$

$$\bar{B}_{\mu^s} = \left(\underline{B}_{\mu^s} + \left(\sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(1 - \rho^2) v_t} + \frac{1}{v_T} \right) \right)^{-1}, \quad \eta_t^* = \frac{v_{t+1} - \mu - \phi(v_t - \mu)}{\sigma_\eta}$$

⁸ 다양한 자료생성을 통한 모의실험과 실증분석을 통해서 시점에 1단계-BHHH알고리즘을 이용한 근사를 이용하는 것에 따른 표본추출과정에서의 문제점을 확인할 수 없었다.

조건부분산 방정식에 포함된 파라미터 $\{\mu, \phi, \rho, \sigma_\eta^2\}$ 을 μ^s 와 같이 직접 표본추출하는 것이 불가능하므로 MH알고리즘을 이용하여 표본추출할 수 있다. 먼저, μ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같이 축약될 수 있다.

$$\pi(\mu^s | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\mu^s}) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left[\left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(v_{t+1} | v_t, r_t, \Psi) \right\} \pi(\mu) \right] \quad (2.31)$$

식 (2.31)에서 알 수 있는 $[\cdot]$ 의 확률커널을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH알고리즘으로 μ 를 표본추출할 수 있다. 식 (2.31)의 $[\cdot]$ 부분은 다음과 같은 절단정규분포의 확률커널이다.

$$q(\mu) = TN_{(0, \infty)} \left[\bar{B}_\mu \left(\bar{B}_\mu^{-1} b_\mu + \frac{(1-\phi)}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{v_{t+1} - \phi v_t - \rho \sigma_\eta(r_t - \mu^s)}{v_t} \right), \bar{B}_\mu \right] \quad (2.32)$$

여기에서 $\bar{B}_\mu = \left(\bar{B}_\mu^{-1} + \frac{(1-\phi)^2}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2) \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{v_t}} \right)^{-1}$ 이다. 식 (2.32)로부터 표본추출한 후보표본 μ^* 를 다음과 같은 MH채택확률로 채택하면 된다.

$$\alpha_{MH}(\mu, \mu^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(v_1 | \mu^*, \phi, \sigma_\eta^2)}{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2)} \right\} \quad (2.33)$$

μ 와 유사하게 ϕ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같이 축약될 수 있다.

$$\pi(\phi | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\phi}) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \left[\left\{ \prod_{t=1}^{T-1} p(v_{T+1} | v_t, r_t, \Psi) \right\} \pi(\phi) \right] \quad (2.34)$$

식 (2.34)에서 $[\cdot]$ 부분은 다음과 같은 절단정규분포의 확률커널이다.

$$q(\phi) = TN_{(-1,1)} \left[\bar{B}_\phi \left(\underline{B}_\phi^{-1} \underline{b}_\phi + \frac{1}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{(v_t - \mu)(v_{t+1} - \mu - \rho\sigma_\eta(r_t - \mu^s))}{v_t} \right), \bar{B}_\phi \right] \quad (2.35)$$

여기에서 $\bar{B}_\phi = \left(\underline{B}_\phi^{-1} + \frac{1}{\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{(v_t - \mu)^2}{v_t} \right)^{-1}$ 이다. 그러므로 식 (2.35)의 $q(\phi)$ 로부터 생성한 후보표본 ϕ^* 를 다음과 같은 MH채택확률로 채택하는 방법으로 ϕ 의 사후표본을 생성할 수 있다.

$$\alpha_{MH}(\phi, \phi^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(v_1 | \mu, \phi^*, \sigma_\eta^2)}{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2)} \right\} \quad (2.36)$$

마지막으로, $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(\psi, \omega^2 | \{r_t\}_{t=1}^T, \{v_t\}_{t=1}^T, \Psi_{-\{\psi, \omega^2\}}) \propto p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) [\{p(r_t, v_{t+1} | v_t, \Psi)\} \pi(\psi, \omega^2)] \quad (2.37)$$

Jacquier et al. (2004)에서 제시된 제약하의 공분산행렬 표본추출법을 이용하기 위해 다음과 같은 보조방정식에 포함된 $\{\psi, \omega^2\}$ 의 사전확률밀도함수를 설정하였다.

$$\bar{\eta}_t = \psi \varepsilon_t + \omega e_t \quad , \quad e_t \sim N(0, 1) \quad , \quad t = 1, \dots, T-1$$

여기에서 $\bar{\eta}_t = [v_{t+1} - \mu - \phi(v_t - \mu)] / \sqrt{v_t}$, $\varepsilon_t = (r_t - \mu^s) / \sqrt{v_t}$ 이다. 이를 이용하면 식 (2.37)의 $[\cdot]$ 부분은 다음과 같은 정규-역감마분포의 확률커널로 축약된

다.

$$\begin{cases} \pi(\omega^2 | \{\tilde{\eta}_t, \varepsilon_t\}_{t=1}^{T-1}) = IG\left(\frac{d_0+T-1}{2}, \frac{s_0+\sum_{t=1}^{T-1} \tilde{\eta}_t^2 - (\sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t \tilde{\eta})^2 / (B_\psi^{-1} + \sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t^2)}{2}\right) \\ \pi(\psi | \omega^2, \{\tilde{\eta}_t, \varepsilon_t\}_{t=1}^{T-1}) = N\left(\frac{\sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t \tilde{\eta}_t}{B_\psi^{-1} + \sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t^2}, \frac{\omega^2}{B_\psi^{-1} + \sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t^2}\right) \end{cases} \quad (2.38)$$

이와 같은 식 (2.38)을 후보생성확률밀도함수로 이용할 수 있다. 식 (2.38)로부터 생성한 $\{\psi^*, \omega^{2*}\}$ 을 $\rho = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + \omega^2}}$, $\sigma_\eta^2 = \psi^2 + \omega^2$ 의 일대일 대응관계를 이용하여 $\{\rho^*, \sigma_\eta^{2*}\}$ 로 변환할 수 있다. 그리고 이렇게 변환된 후보표본을 다음과 같은 MH채택확률로 채택하는 방법으로 $\{\rho, \sigma_\eta^2\}$ 를 표본추출할 수 있다.

$$\alpha_{MH}(\{\rho, \sigma_\eta^2\}, \{\rho^*, \sigma_\eta^{2*}\}) = \min \left\{ 1, \frac{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^{2*})}{p(v_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2)} \right\} \quad (2.39)$$

이상의 논의에서 알 수 있듯이 조건부분산의 초기치에 대한 설정 때문에 MH알고리즘을 이용하여 $\{\mu, \phi, \sigma_\eta^2, \rho\}$ 을 생성하는 것이 필요하다. 기존 연구에서와 같이 초기치를 미지의 상수로 설정하거나 $\{\mu, \phi, \sigma_\eta^2\}$ 의 함수가 아닌 분포로 설정하면, 이들 파라미터를 직접 표본추출하는 것이 가능하다. 그러나 이 경우 앞서 언급한 바와 같이 Feller제곱근과정의 중요한 성질인 감마분포를 따르는 비조건부분포에 대한 정보를 고려하지 않는 근사모형을 추정하게 된다. 이와 달리 본 연구에서와 같이 모형을 설정하면, 조건부분산의 비조건부분포를 명시적으로 고려할 뿐만 아니라 파라미터들의 사후표본 또한 이를 충족하도록 생성할 수 있다.

3. 파티클필터를 이용한 확률변동성모형 진단 및 평가

전기의 분산과 수익률의 확정함수인 GARCH모형과 달리 연속시간 확률변동성모형에서는 조건부분산이 미관측상태변수이므로 모형의 적합성 검증

과 진단이 쉽지 않다. 앞서 논의한 연속시간모형을 오일러이산화한 모형에 대한 베이지언 추정을 하는 경우에도 마찬가지이다. 베이지언 추론을 하는 경우, 일반적으로 모형의 사후확률의 비(*posterior odds ratio*) 또는 베이즈팩터(*Bayes factor*)를 이용한 모형 비교가 이용된다. 그러나 베이즈팩터를 이용한 모형 비교는 상대적인 적합성을 비교하는 하는 방법이므로 특정 모형의 절대적인 적합성을 진단·평가하는 방법으로 적합하지 않다. 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론의 경우, 베이즈팩터를 이용한 모형 비교는 상대적으로 용이한 반면 모형 진단은 쉽지 않다. 따라서 고전적 접근법(*classical approach*)의 표준화잔차(*standardized residuals*)에 대응되는 사후표준화잔차(*posterior standardized residuals*)에 대한 Q-Q플롯을 이용한 검정과 같은 비공식적인 검정(*informal test*)이 주로 이용되었다(Eraker et al. (2003), Li et al. (2006)). 동일한 맥락에서 Geweke and Amisano (2010)은 확률변동성을 포함하는 사후표본들을 이용하여 구한 사후 PIT(*posterior probability integral transform*)를 이용하여 예측성과를 분석하였다. 베이지언 접근법을 따르는 기존 연구들의 이러한 경향은 확률변동성모형에 대한 사후표본추출 알고리즘과 계산이 쉽지 않은 베이즈팩터를 구하는데 주로 연구 초점을 두었기 때문이다. 그러나 모형 추정 및 진단의 어려움은 비선형 비정규 상태공간모형(*nonlinear nonnormal state space model*)에 대한 통계적 추론에서 일반적으로 직면하게 되는 문제이다. PIT를 이용한 모형 진단은 이러한 문제를 극복할 수 있는 방법이다. 본 절에서는 보조파티클필터와 PIT를 이용하여 모형을 진단할 때 기존 연구들에서 간과된 파라미터추정에 따른 불확실성을 중심으로 진단 통계량들의 특성을 살펴보고자 한다.

연속상태변수(*continuous state variables*)를 가지는 비선형 비정규 상태공간모형의 PIT를 계산하는 일반적인 방법으로는 파티클필터(*particle filter*)가

주로 이용된다. 파티클필터는 상태공간모형에서 미관측상태변수의 연속필터 확률밀도함수(continuous filtered probability density function)를 가중이산표본(weighted discrete samples)으로 근사하는 방법이다. 선형정규상태공간모형에서의 칼만필터(Kalman filter)와 유사하게 파티클필터는 상태변수의 예측확률밀도함수(prediction probability density function)와 필터확률밀도함수를 가중이산표본으로 근사하는 일반적인 시뮬레이션기반 필터링 방법이다.

관측치벡터를 y_t , 마르코프과정을 따르는 미관측상태변수벡터를 α_t , 파라미터벡터를 ψ 라 하면, 일반적인 상태공간모형은 다음과 같은 확률밀도함수로 표현될 수 있다.

$$\begin{cases} p(\alpha_1; \psi) \\ p(\alpha_{t+1} | \alpha_t; \psi) \quad , \quad t = 1, \dots, T-1 \\ p(y_t | \alpha_t; \psi) \quad \quad , \quad t = 1, \dots, T \end{cases} \quad (3.1)$$

여기에서 $p(\alpha_1; \psi)$ 와 $p(\alpha_{t+1} | \alpha_t; \psi)$ 는 각각 상태변수의 초기확률밀도함수와 전이확률밀도함수, $p(y_t | \alpha_t; \psi)$ 는 관측확률밀도함수를 나타낸다. 식 (3.1)에서 상태변수 $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 가 주어졌을 때, $\{y_t\}_{t=1}^T$ 들은 서로 독립인 것으로 가정된다. 이하의 논의에서 ψ 는 주어진 것으로 가정하고 확률밀도함수에서 생략하기로 한다. 베이지정리를 이용하면, t 기의 상태변수 $\alpha_{1:t}$ 의 필터확률밀도함수 $p(\alpha_{1:t} | Y_t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(\alpha_{1:t+1} | Y_t) = \frac{p(y_{t+1} | \alpha_{t+1})p(\alpha_{t+1} | \alpha_t)}{p(y_{t+1} | Y_t)} p(\alpha_{1:t} | Y_t) \quad (3.2)$$

여기에서

$$\alpha_{1:t} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$$

$$Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$$

$$p(y_{t+1}|Y_t) = \int p(y_{t+1}|\alpha_{t+1})p(\alpha_{t+1}|\alpha_t)p(\alpha_{1:t}|Y_t)d\alpha_{1:t+1}$$

일반적인 상태공간모형의 필터링과정은 식 (3.2)를 이용하여 얻어지는 다음과 같은 상태변수의 확률밀도함수에 대한 예측과 갱신 과정이다.

$$\begin{cases} p(\alpha_{t+1}|y_{1:t}) = \int p(\alpha_{t+1}|\alpha_t) p(\alpha_t|y_{1:t}) d\alpha_t & (prediction) \\ p(\alpha_{t+1}|y_{1:t+1}) = \frac{p(y_{t+1}|\alpha_{t+1})p(\alpha_{t+1}|y_{1:t})}{\int p(y_{t+1}|\alpha_{t+1})p(\alpha_{t+1}|y_{1:t})d\alpha_{t+1}} & (update) \end{cases} \quad (3.3)$$

선형정규상태공간모형과 마르코프 국면전환모형과 같은 예외적인 경우를 제외하면, 일반적으로 식 (3.3)의 예측확률밀도함수와 필터확률밀도함수에 포함된 적분을 계산하는 것이 어렵거나 불가능하다. 파티클필터는 이와 같이 계산이 어렵거나 불가능한 예측 및 필터확률밀도함수를 가중이산표본으로 근사하는 방법이다. 즉, 파티클필터는 $t+1$ 기의 관측치 y_{t+1} 이 관측되었을 때 t 시점의 필터확률밀도함수 $p(\alpha_t|y_{1:t})$ 를 근사하는 이산가중표본 $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}$ 을 $t+1$ 시점의 필터확률밀도함수 $p(\alpha_{t+1} | y_{1:t+1})$ 를 근사하는 이산가중표본 $\{\alpha_{t+1}^{(i)}, w_{t+1}^{(i)}\}$ 로 순차적으로 갱신하는 시뮬레이션기반 필터링방법이다. 이 과정에서 $w_t^{(i)}$ 는 $\sum_{i=1}^N w_t^{(i)} = 1$ 을 충족하는 $\alpha_t^{(i)}$ 에 대한 가중치를 나타낸다. 필터링과정에 포함된 적분을 시뮬레이션을 이용하여 근사하는 과정에는 중요표본추출법(importance sampling)과 리샘플링(resampling)이 이용된다. 파티클

필터에서 이용되는 중요확률밀도함수(importance density)는 다음과 같다.

$$q(\alpha_{1:t+1} | Y_{t+1}) = q(\alpha_{t+1} | \alpha_{1:t}, Y_{t+1})q(\alpha_{1:t} | Y_t) \quad (3.4)$$

식 (3.4)에서 $q(\alpha_{1:t+1} | Y_{t+1})$ 의 서포트는 $p(\alpha_{1:t+1} | Y_{t+1})$ 의 서포트를 포함한다. 식 (3.4)를 이용하면, 식 (3.2)의 필터확률밀도함수에 대한 중요가중치를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w_{t+1}^{(i)} \propto \frac{p(y_{t+1} | \alpha_{t+1}^{(i)})p(\alpha_{t+1}^{(i)} | \alpha_t^{(i)})}{q(\alpha_{t+1}^{(i)} | \alpha_{1:t}^{(i)}, Y_{t+1})} w_t^{(i)} \quad (3.5)$$

여기에서 $w_t^{(i)} = \frac{p(\alpha_{1:t}^{(i)} | Y_t)}{q(\alpha_{1:t}^{(i)} | Y_t)}$ 으로 i 번째 표본의 중요가중치이다. 파티클필터의 예측 및 필터확률밀도함수에 대한 근사 정도(accuracy)와 효율성(efficiency)은 중요표본추출법에 이용되는 중요확률밀도함수와 이산표본의 퇴화(degeneracy)를 막기 위한 리샘플링 방법의 선택에 크게 영향을 받을 수 있다. Kim et al. (1998), Chib et al. (2002), Chib et al. (2006), Omori et al. (2007) 등은 베이지언 모형비교에 필요한 주변우도함수를 구하는데 Pitt and Shephard (1999)의 보조파티클필터를 이용하였다.

본 연구의 모의실험과 실증분석에서는 Carpenter et al. (1999)와 Pitt and Shephard (2001)에서 제안된 보조파티클필터와 함께 효율적인 체계적 리샘플링(systematic resampling) 알고리즘을 이용한다. 보조파티클필터를 적용하기 위

해 식 (2.11)의 확률변동성모형을 다음과 같이 다시 쓸 필요가 있다.

$$\begin{cases} r_t = \mu^s + \sqrt{v_t} \varepsilon_t, & t = 1, \dots, T \\ v_t = \mu + \phi(v_{t-1} - \mu) + \sigma_\eta \rho(r_{t-1} - \mu^s) + \sigma_\eta \sqrt{(1 - \rho^2)} \sqrt{v_{t-1}} e_t, & v_t > 0, t = 2, \dots, T \\ v_1 \sim G\left(\frac{2(1-\phi)\mu}{\sigma_\eta^2}, \frac{2(1-\phi)}{\sigma_\eta^2}\right) \end{cases} \quad (3.6)$$

보조파티클필터링에서 주의할 점은 초기를 제외한 다른 시점의 표본을 생성할 때, 조건부분산이 항상 양이 되도록 절단정규분포로부터 표본을 생성하는 것이 필요하다는 것이다. 본연구에서 이용되는 보조파티클필터 알고리즘에 대한 자세한 논의는 부록 C에 수록하였다.

파티클필터링을 통해서 $t-1$ 시점의 이산가중표본과 가중치 $\{\alpha_{t-1}^{(i)}, w_{t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ 이 주어지면, 전이확률밀도함수 $p(\alpha_t | \alpha_{t-1}^{(i)})$ 로부터 $\alpha_t^{(i)}$ 를 표본추출한 후, 1기간 예측확률(one-step ahead predictive distribution)로 정의되는 PIT를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$u_t(\psi_0) = Pr[Y_t \leq y_t | y_{1:t-1}; \psi_0] = \int Pr[Y_t \leq y_t | \alpha_t, y_{1:t-1}; \psi_0] p(\alpha_t | y_{1:t-1}; \psi_0) d\alpha_t \quad (3.7)$$

$$\simeq \sum_{i=1}^N w_{t-1}^{(i)} P(y_t | \alpha_t^{(i)}; \psi_0)$$

여기에서 y_t 와 Y_t 는 각각 시점의 관측치와 이에 대한 확률변수, $y_{1:t-1} = \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$,⁹ ψ_0 는 참파라미터벡터(true parameter vector)를 나타낸다. 그리고 $P(y_t | \alpha_t^{(i)})$ 는 $P(y_t | \alpha_t^{(i)}) = \int^{y_t} p(y | \alpha_t^{(i)}) dy$ 인 관측치 y_t 의 누적확률밀도함수이다. $P(y_t | \alpha_t^{(i)})$

⁹ 이하의 논의에서 모든 확률변수는 연속확률변수(continuous random variables)를 나타낸다.

를 해석적으로 적분하는 것이 불가능하지만 $p(y_t|\alpha_t^{(i)})$ 로부터 관측치의 예측 표본 $y_t^{(i)}$ 를 표본추출하는 것이 가능한 경우, 다음과 같은 방법으로 PIT를 구할 수도 있다.

$$u_t(\psi_0) \simeq \sum_{i=1}^N w_{t-1}^{(i)} I(\tilde{y}_t^{(i)} \leq y_t) \quad (3.8)$$

여기에서 $I(A)$ 는 A 의 조건이 충족되면 1, 그렇지 않으면 0인 표시함수(indicator function)를 나타낸다.

모형설정 오류가 없다는 귀무가설하에 식 (3.7)의 PIT $u_t(\psi_0)$ 는 독립적이고 동일한 표준일량분포(independent and identically distributed standard uniform distribution) *i.i.d* $U[0,1]$ 를 따른다(Rosenblatt (1952)). Diebold et al. (1998)은 PIT의 이와 같은 성질을 이용하여 모형의 확률예측 평가(density forecast evaluation)방법을 제시하였다. Smith (1985), Frühwirth-Schnatter (1996), Kim et al. (1998), Gerlach et al. (1999), Berkowitz (2001) 등은 PIT를 표준정규분포함수(standard normal distribution function)의 역함수로 변환하여 얻어지는 $z_t(\psi_0) = \Phi^{-1}(u_t(\psi_0))$ 를 이용한 모형 진단과 예측평가를 제안하였다. $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포함수를 나타낸다. 귀무가설하에서 PIT가 *i.i.d* $U[0,1]$ 분포를 따르면 $z_t(\psi_0)$ 는 독립적이고 동일한 표준정규분포(independent and identically distributed standard normal distribution) *i.i.d* $N(0,1)$ 를 따른다. 따라서 $z_t(\psi_0)$ 의 정규성(normality)과 독립성(independence)을 검정하는 방법으로 모형 진단과 확률예측 평가를 할 수 있다. 정규성과 독립성 검정에서는 Jarque-Bera 검정, Ljung-Box검정, McLead-Li검정 등이 이용될 수 있다¹⁰. 그리고 PIT의 일양성과 독립성을 한꺼번에 검정하는 옴니버스검정으로 Hong-Li검정과 같은 비모수 검정통계량(nonparametric test statistic) 등이 이용될 수도 있다.

¹⁰ 정규성과 독립성 검정을 이용한 시계열모형 진단에 관련한 자세한 논의에 대해서는 Li (2004)를 참조할 수 있다.

파티클필터를 이용하여 구한 PIT와 그 정규분포역변환 $z_t(\psi_0)$ 를 이용하여 구한 일반적인 검정통계량(parametric test statistics)으로 확률변동성모형을 진단하는 경우, 파라미터 추정에 따른 불확실성으로 인한 검정의 사이즈 왜곡(size distortion)이 발생할 수 있다. 표본내검정(in-sample test)에서 Newey (1985)와 Tauchen (1985)는 파라미터 추정에 따른 불확실성이 검정통계량에 미치는 영향에 대한 일반적인 이론을 제시하였다¹¹. Newey (1985)와 Tauchen (1985)에서 제시된 이론의 관점에서 GARCH모형 진단에 일반적으로 이용되는 표준화된 잔차를 이용하는 Jarque-Bera검정통계량, Ljung-Box검정통계량, McLeod-Li검정통계량 등은 일반적으로 다음과 같은 적률조건을 이용한 검정통계량으로 볼 수 있다¹².

$$E[g(x_t, \psi_0)] = 0 \quad (3.9)$$

여기에서 x_t 는 확률변수를 그리고 ψ_0 는 미지의 참파라미터를 나타낸다. 귀무가설 하에서 식 (3.9)의 적률조건은 다음과 같은 점근적 특성을 가진다.

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T g(x_t, \psi_0) \stackrel{asym}{\sim} N(0, \Sigma_g) \quad (3.10)$$

여기에서 $\Sigma_g = \lim_{T \rightarrow \infty} Var\left\{\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T g(x_t, \psi_0)\right\}$ 이다. 검정통계량에 다음과 같

¹¹ West (1996), West and McCracken (1998)은 파라미터 추정에 따른 불확실성이 표본외검정통계량(out-of-sample test statistics)에 미치는 영향에 대한 일반적인 이론을 제시하였다. 표본외검정에서도 파라미터 추정의 불확실성을 명시적으로 고려하지 않을 경우 검정의 사이즈 왜곡이 발생할 수 있다. Chen (2011)은 표본외확률예측 평가에서 GMM접근법으로 파라미터 추정의 불확실성을 고려하는 방법을 제시하였다. 그러나 Chen (2011)에서 제시된 방법을 시뮬레이션 기반 추정법으로 추정한 확률변동성모형 진단에 적용하기에는 어려움이 있다.

¹² 모형진단에 이용될 수 있는 적률조건에 대한 논의는 부록B에 수록되어 있다.

은 점근적 특성을 가지는 일치성을 가지는 파라미터 추정치 $\hat{\psi}_T$ 가 이용되면,

$$\sqrt{T}(\hat{\psi}_T - \psi_0) \stackrel{asym}{\sim} N(0, \Omega) \quad (3.11)$$

적률조건을 이용한 검정통계량은 다음과 같은 점근적 특성을 가진다.

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T g(x_t, \hat{\psi}_T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T g(x_t, \psi_0) + \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial g(x_t, \psi_0)}{\partial \psi^T} \right\} \sqrt{T}(\hat{\psi}_T - \psi_0) + O_p(1) \quad (3.12)$$

이를 보면, $\left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial g(x_t, \psi_0)}{\partial \psi^T} \right\} = 0$ 인 경우를 제외한 일반적인 경우, $\sqrt{T}$ 일치추정치 이용하여 구한 검정통계량의 점근적 분산이 참파라미터 ψ_0 에서 구한 검정통계량의 분산, $\hat{\psi}_T$ 의 분산, 그리고 이들의 공분산에 의존함을 알 수 있다. 따라서 $\sqrt{T}$ 일치추정치를 이용한 검정에서 파라미터 추정에 따른 불확실성으로 인한 사이즈 왜곡(size distortion)이 발생할 수 있다. 모수검정통계량의 이러한 특성은 일양성과 정규성 검정에 흔히 이용되는 비모수진단통계량인 Kolmogorov-Smirnov 검정통계량에도 동일하게 적용된다¹³. 일반적으로 모형추정이 비교적 쉬운 경우 부트스트랩(bootstrap)을 이용하여 검정통계량의 정확한 분포(exact distribution)를 얻을 수 있다. 그러나 본 연구에서와 같은 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론의 경우에는 지나친 계산상의 부담으로 인해 이러한 접근법을 이용하는 것이 실질적으로 불가능하다. PIT와 PIT의 정규분포역변환을 이용한 검정을 하는 경우, 확률변동성모형을 분석한 기존연구들은 파라미터 추정에 따른 불확실성을 명시적으로 고려하지 않고 있

¹³ Bai (2003)는 PIT와 표본일양분포의 누적확률밀도함수를 비교하는 수정 Kolmogorov-Smirnov검정(modified KS test)을 제안하였다. Bai (2003)의 수정 KS검정통계량은 Khmaladze 마팅게일변환(Khmaladze's martingale transformation)을 이용하여 파라미터 추정에 따른 불확실성을 제거하여 얻어진다. 그러나 미관측상태변수를 포함하는 비선형정규 상태공간모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언 추정과 같은 시뮬레이션기반 추정법을 적용한 경우 일반적으로 Khmaladze 마팅게일변환이 쉽지 않다.

다. Duan (2003), Bontemps and Meddahi (2005), Chen (2011) 등은 $z_t(\psi)$ 의 정규성 검정에서 파라미터 추정에 따른 불확실성을 제거하기 위한 변환을 제안하였다. 그러나 일반적으로 확률변동성모형 진단에 Hermite다항식(Hermite polynomials)을 이용하는 Bontemps and Meddahi (2005)의 정규성 검정통계량을 제외한 Duan (2003), Chen (2011)의 변환 방법을 적용하기 어렵다.

GARCH모형에서와 같이 표준화잔차를 이용하는 일반적인 진단통계량들이 파라미터추정에 따른 불확실성에 영향을 받는 반면¹⁴, PIT의 일양성과 독립성을 검정하는 Hong and Li (2005)¹⁵의 비모수 음니버스검정통계량은 파라미터추정에 따른 불확실성에 영향을 받지 않는다. Hong and Li검정통계량이 파라미터 추정에 따른 불확실성에 영향을 받지 않는 것은 통계량이 파라미터 수렴속도 $\sqrt{T}$ 보다 느린 수렴속도를 가지기 때문이다.

확률변동성모형을 이용하는데 있어서 어려운 부분 가운데 하나가 모형 추정과 진단이다. 베이지언 추론을 이용하는 경우 모형 진단은 계산상의 부담(computational burden)으로 인해 더 어려워진다. 앞서 언급한 바와 같이 기존 연구들에서는 파라미터 추정에 따른 불확실성을 고려하지 않거나 사후표본들을 이용하여 얻은 사후잔차를 이용한 비공식적인 진단이 행해졌다. 그러나 일부를 제외한 기존 고전적 접근법에서 파라미터추정의 불확실성을 고려하는 진단 방법들을 이용하는 것이 실질적으로 어렵거나 불가능한 경우가 대부분이다. 최근 다양한 시뮬레이션 기반 비모수검정통계량들이 제시되고 있으나 이러한 방법들을 베이지언 추론한 모형 진단에 적용하기에는 계산상의 부담이 지나치게 크다. 이러한 한계를 고려하여 앞서 살펴본 PIT를 이용한 모형진단에 이용될 수 있는 고전적 검정통계량과 파라미터 추정에 영향을 받지 않는

¹⁴ Fiorentini et al. (2004)는 Hentschel (1995)의 일반적인 GARCH-M모형이 포함하는 내포 모형들과 Sentena (1995)의 QGARCH-M모형의 경우 Jarque-Bera검정통계량이 파라미터 추정의 불확실성에 영향을 받지 않음을 보였다.

¹⁵ Hong and Li (2005) 검정통계량에 대한 논의는 부록에 수록되어 있다

Hong-Li검정의 사이즈와 검정력을 비교하는 모의실험을 통해 고전적 검정통계량들의 활용가능성을 점검해 보고자 한다. 이러한 모의실험 결과는 비모수적 방법론에 익숙하지 않은 응용연구자들에게 유용한 정보가 될 수 있을 뿐만 아니라 검정방법 선택과 해석에 중요한 정보를 제공할 수 있다.

4. 모의실험 및 실증분석

4.1 모의실험

본 절에서는 앞서 제시한 MCMC알고리즘의 성과를 모의실험을 통해 살펴본다. 이를 위해 2.2절의 MCMC알고리즘으로 표본추출한 사후표본의 특성(sampling properties of posterior samples)들을 중심으로 알고리즘의 성과를 살펴볼 것이다. 이와 함께 파라미터추정에 따른 불확실성에 영향을 받을 수 있는 일반적인 시계열모형 진단통계량과 그렇지 않은 Hong-Li 옴니버스검정¹⁶의 사이즈와 검정력을 비교하여 살펴본다.

4.1.1 MCMC알고리즘으로 생성한 사후표본의 특성

사후표본의 특성을 통해서 본 연구에서 제안하는 MCMC알고리즘의 정도(accuracy)를 살펴보기 위하여 다음과 같은 이산화과정을 따르는 $T = 2000$ 과 $T = 3000$ 의 자료를 생성한 후, 2장 2절 2의 MCMC알고리즘을 이용하여 추정

¹⁶ 모의실험과 실증분석에 이용되는 Hong-Li검정 프로그램은 Yongmiao Hong으로부터 받은 GAUSS프로그램을 C로 변환한 것임을 밝혀둔다.

하는 실험을 1,000회 수행하였다.

$$\begin{aligned} r_t &= 0.0444 + \sqrt{v_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1) \\ v_{t+1} &= 0.9052 + 0.9769(v_t - 0.9052) + \sqrt{0.020564} \sqrt{v_t} \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, 1) \\ \text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) &= -0.3974 \end{aligned} \quad (4.1)$$

모의실험에서 무정보에 가까운 다음과 같은 사전확률밀도함수를 설정하였다.

$$\begin{cases} \pi(\mu^s) = N(0, 10^4), \pi(\mu) = TN_{(0, \infty)}(0, 10^2), \pi(\phi) = TN_{c(-1, 1)}(0, 10^2) \\ \pi(\psi | \omega^2) = N(0, \omega^2/2), \pi(\omega^2) = IG(2.5, 0.025) \end{cases}$$

다른 파라미터들과 달리 ω^2 의 사전확률밀도함수로는 $\psi = 0$ 인 모형에 자주 이용되는 사전확률밀도함수를 설정하였다. 식 (4.1)과 같은 이산모형을 이용하여 자료를 생성한 것은 연속시간모형의 오일러이산화 편의가 파라미터 추정에 미치는 효과를 완전히 통제한 상태에서 본 연구에서 제안한 MCMC알고리즘의 성과를 살펴보기 위함이다. 식 (4.1)의 자료생성에 이용된 각 파라미터 값들은 Eraker et al. (2003)의 [표 3]에 수록된 추정치들이다.

각 생성자료에 대한 베이지언 추론과정에서 충분한 수렴을 확보하기 위하여 총 70,000개의 사후표본을 추출한 후, 초기 50,000개를 제외한 나머지 20,000개의 표본에서 5개마다 하나씩 선택하여 얻어지는 4,000개를 이용하였다. 이와 같은 방법으로 얻어진 1,000개의 사후평균(posterior mean)에 대한 요약통계량은 [표 4.1]과 [그림 4.1]에 수록되어 있다. [표 4.1]의 (A)와 (B)패널의 2열~6열에는 각각 $T = 2000$, $T = 3000$ 의 자료를 분석하여 얻은 파라미터들의 사후평균의 평균(mean), 표준편차(standard deviation), 95% HPD구간(highest posterior density interval), RMSE(root mean squared error)를 수록하였다. 그리

고 7열과 8열의 $Wald_0$ 와 $Wald_{01}$ 는 각각 다음과 같은 회귀식의 계수에 대한 $H_0 : a = 0$ 과 $H_0 : a = 0, b = 1$ 의 귀무가설을 5% 유의수준에서 검정한 Wald 검정의 기각율(rejection rate)을 나타낸다.

$$(a) \sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t} = a + e_t, \quad (b) \sqrt{v_t^{true}} = a + b\sqrt{\bar{v}_t} + u_t \quad (4.2)$$

여기에서 $\sqrt{v_t^{true}}$ 는 참변동성을, $\sqrt{\bar{v}_t}$ 는 변동성의 사후평균을 나타낸다. 계수의 유의성을 검정하는 Wald검정에는 ‘quadratic spectral kernel’과 ‘automatic lag selection’을 이용하여 얻은 Andrews (1991), Andrews and Monahan (1992)의 HAC공분산행렬(Heteroscedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix)을 이용하였다. 그리고 9열과 10열에는 $\sqrt{v_t}$ 의 사후평균의 성과를 측정하기 위한 $RMSE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T (\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t})^2$ 와 $MAPE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \left(\left[\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t} \right] / \sqrt{v_t^{true}} \right) \times 100$ 의 사후평균에 대한 요약통계량을 수록하였다. 그리고 [그림 4.1]의 1행과 2행에는 각각의 파라미터들의 사후평균의 히스토그램과 함께 커널확률밀도함수(empirical kernel density)를 도시하였다. 1행과 2행은 각각 표본크기 $T = 2000, T = 3000$ 의 자료를 분석한 모의실험 결과를 도시한 것이다. [그림 4.1]에서 수직선은 참파라미터값을 나타낸다.

[표 4.1]과 [그림 4.1]은 본 연구에서 제시한 MCMC알고리즘으로 추정된 파라미터의 사후평균들의 평균이 참파라미터값들에 가깝고 95%HPD구간이 참파라미터값들을 충분히 포함하는 좋은 성과를 보여주고 있다. 그리고 [표 4.1]에서 $Wald_0$ 의 기각율이 약 8%, $Wald_{01}$ 의 기각율 또한 13% 14%, MAPE의 평균이 약 14%로 MCMC알고리즘이 변동성 또한 잘 적합하고 있음을 보여주고 있다. 특히 조건부분산의 장기평균은 자료의 크기가 커짐에 따라 추정치의 정도가 뚜렷하게 개선됨을 알 수 있다.

4.1.2 진단통계량들의 사이즈와 검정력 비교

다음으로 MCMC알고리즘을 이용한 파라미터 추정치과 보조파티클필터를 이용하여 구한 PIT와 PIT의 정규분포역변환을 이용한 모형 진단에서 파라미터추정에 따른 불확실성이 검정통계량의 사이즈에 미치는 영향을 분석하였다. 식 (4.1)을 이용하여 $T = 3000$ 과 $T = 4000$ 의 자료를 생성한 후, 각각 $R = 2000, R = 3000$ 크기의 자료를 분석하여 얻은 파라미터를 이용한 표본내검정과 나머지 $P = 1000$ 개의 자료에 대한 표본외검정을 수행하였다. 표본외검정에서는 각각 $R = 2000, R = 3000$ 의 자료로 추정된 파라미터 추정치를 고정시키는 ‘fixed scheme’을 이용하였다. 파라미터추정에 따른 불확실성에 따른 사이즈왜곡 정도를 분석하기 위하여 위와 같은 자료생성과 검정을 1000회 수행하였다¹⁷. 검정통계량으로는 모형진단에 일반적으로 이용되는 Kolmogorov-Smirnov검정(KS), Cramer-von-Mise검정(CvM), Pearson-Chisquare검정과 함께 GARCH모형 진단에 이용되는 Jarque-Bera검정, Berkowitz-tail검정, Ljung-Box검정, McLead-Li검정, Engle-LM검정, 그리고 $z_t(\psi_0)$ 의 정규성 검정에 이용되는 14차 적률조건(GMM(0,0))과 부록 B에서 논의한 (B.12)의 적률조건들에 대한 개별 GMM검정들(GMM(1,1), GMM(2,1), GMM(1,2), GMM(2,2), GMM(3,3), GMM(4,4))과 결합 GMM검정(GMM-joint) 등을 이용하였다. 이들 검정들과 Hong-Li검정(이하 HL 검정)의 5%와 10% 유의수준에서의 사이즈를 비교하는 방법으로 파라미터추정에 따른 사이즈왜곡을 살펴보았다. 일양성을 검정하는 Pearson-Chisquare검정에서 [0,1]을 20개의 구간으로 분할하는 설정을 이용하였다. 식 (B.12)의 적률조건들에 대한 GMM검정에서 시차는 $k = 3$ 으로 설정하

¹⁷ 모의실험과 실증분석에 이용되는 MCMC알고리즘은 C로 작성되었으며 컴파일러로는 GNU GCC-4.6.3을 이용하였다. 그리고 하드웨어는 Intel-i7-4790K CPU와 32기가바이트 메모리를 장착한 LINUX-OS-PC를 이용하였다. $T = 3000$ 의 자료에 대한 확률변동성모형 추정에서 100,000개의 사후표본을 추출하는데 약 10 12분의 시간이 소요되었다.

였다. 그리고 HL검정에서는 Hong and Li (2005)에서 제시된 시차선택기준에 따라 통계량들이 안정화되도록 시차를 결정하였다. 50회의 사전모의실험을 통해서 시차 30내외에서 통계량들이 안정화되는 것으로 나타났으므로 모의 실험에서 HL검정의 시차를 30으로 설정하였다. 마지막으로 Ljung-Box검정, McLead-Li검정, Engle-LM검정의 시차(자유도)를 모두 10으로 설정하였다.

[표 4.2]의 (A)패널에는 모의실험을 통해 얻은 각 검정의 기각율이 수록되어 있다. (A)패널을 보면, PIT의 일양성을 검정하는 KS검정과 CvM검정이 표본내검정에서 심각한 과소기각(under-rejection), 표본외검정에서 과다기각 경향이 있음을 알 수 있다. 이와 달리 HL검정의 W 통계량과 적률조건들에 대한 결합 GMM검정(GMM-joint)은 표본내검정과 표본외검정에서 심각한 과다기각(over-rejection)의 문제를 보여주고 있다. 심각한 과소 또는 과다기각 경향이 있는 이들 통계량에 대해서는 더 이상 논의하지 않기로 한다. 그리고 표본외검정에서 HL검정의 $M(1,1)$, 정규성 적률조건검정(GMM(0,0)), 레버리지 효과를 검정하는 적률조건검정(GMM(2,1))은 과다기각의 문제를 보여주고 있다. 이들을 제외하면, 전반적으로 고전적 검정들의 사이즈가 파라미터추정의 불확실성에 영향을 받지 않는 HL검정과 비슷하거나 명목 유의수준에 더 가까운 것을 확인할 수 있다. 따라서 일간자료와 같은 고빈도자료를 분석하는 확률변동성모형 진단에서 이들 고전적 검정들의 사이즈왜곡 문제가 심각하지 않을 수 있음을 알 수 있다.

다음과 같은 AR(1)-GJR-GARCH-t(6)의 모형을 이용한 모의실험을 통해서 앞서 검정의 사이즈 분석에 이용된 검정들의 5%와 10% 유의수준에서의

검정력을 비교해 보기로 한다.

$$\begin{aligned} r_t &= 0.05 + 0.06r_{t-1} + e_t, \quad e_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_6(0, 1) \\ h_t &= 0.01 + 0.03e_{t-1}^2 + 0.03e_{t-1}^{-2} + 0.94h_{t-1}, \quad e_{t-1}^- = \min(0, e_{t-1}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

여기에서 $t_\nu(0, 1)$ 은 자유도 ν 의 표준화된 t 분포를 따르는 확률변수를 나타낸다. (식 4.3)은 검정력을 비교하고자하는 통계량들이 조건부분포와 함께 다양한 조건부적률의 동학 설정을 검정하는 옴니버스검정임을 고려한 것이다. 식 (4.3)에서 각 파라미터값은 Eraker et al. (2003)에서 분석한 1980년 01월 01일 1999년 12월 31일 기간의 S&P500지수 수익률에 대한 AR(1)-GJR-GARCH-t 모형 추정결과를 참고한 것이다. GJR-GARCH-t모형은 자산가격 수익률의 두꺼운 꼬리와 변동집중, 그리고 레버리지효과 등의 자산가격 수익률의 전형적인 특성을 설명할 수 있기 때문에 실증분석에서 자주 이용되는 모형이다. 그리고 식 (4.3)의 AR(1)설정은 시장미시구조에 따라 흔히 관측될 수 있는 주가수익률의 특징으로 볼 수 있다. 확률변동성모형 또한 이러한 특징을 포착할 수 있는 모형이다. 하지만 앞서 논의한 표준적인 확률변동성으로 $t_\nu(0, 1)$ 과 같은 수익률분포의 두꺼운 꼬리를 포착하기 어렵다. 따라서 본 논문에서 다른 확률변동성모형이 설명하기 어려운 두꺼운 꼬리의 수익률분포와 조건부적률 동학을 가지는 자료를 이용하여 앞서 논의한 확률변동성모형 진단통계량들이 이러한 자료의 특징을 포착할 수 있는지를 살펴보고자 한다. 이를 위해 $T = 3500$ 과 $T = 4500$ 의 자료를 생성한 후, 초기치의 영향을 제거하기 위하여 500개의 초기자료를 버리는 방법으로 자료를 생성하였다. 그리고 사이즈 분석에서와 유사하게 각 자료에서 각각 $R = 2000$, $R = 3000$ 크기의 자료를 분석하여 얻은 파라미터를 이용한 표본내검정과 나머지 $P = 1000$ 개의 자료에 대한 표본외

검정을 수행하였다. 표본외검정에서는 각각 $R = 2000$, $R = 3000$ 의 자료로 추정된 파라미터 추정치를 고정시키는 ‘fixed scheme’을 이용하였다. 이와 같은 방법으로 1,000회 모의실험을 수행하여 각 검정들의 검정력을 살펴보았다.

[표 4.2]의 (B)패널에는 5%와 10%의 유의수준에서 각 검정들의 기각율을 수록하였다. 모든 검정들의 설정은 사이즈분석에서와 동일하다. 자료의 특성을 알고 있으므로 검정통계량이 수익률분포의 두꺼운 꼬리와 조건부적률의 동학 측면의 모형설정오류 포착여부를 중심으로 검정력을 살펴보기로 한다. [표 4.2]의 (B)를 보면, 표본내검정에서는 전통적인 Jarque-Bera검정, Berkowitz-tail검정, 정규성 적률조건검정(GMM(0,0)), 자기상관 적률조건검정(GMM(1,1))이 HL검정의 M(1,1)검정보다 검정력이 더 좋은 것으로 나타나고 있다. 그러나 표본외 자기상관검정에서는 이와 반대로 HL검정의 M(1,1)검정이 더 검정력이 좋은 것으로 나타나고 있다. 생성된 자료의 수익률분포가 두꺼운 꼬리를 가짐에도 불구하고 Diebold et al. (1998)의 PIT의 히스토그램을 이용한 일양성 검정에 대응되는 Pearson-Chisq검정의 검정력은 다른 정규성검정들에 비해 좋지 않은 것으로 나타나고 있다. Ljung-Box검정 표본정보량 증가에 따라 개선되기는 하지만 상대적으로 표본내검정력보다 표본외검정력이 현저하게 좋지 않은 것으로 나타나고 있다. 비대칭성검정에서는 전반적으로 HL검정의 M(1,2), M(2,1)의 검정력이 GMM(1,2), GMM(2,1)의 적률검정보다 좋은 것으로 나타나고 있다. 흥미로운 점은 ‘volatility-in-mean’에 해당하는 모형설정오류가 없음에도 불구하고 M(1,2)검정이 이를 기각하는 경향이 강하다는 것이다. 레버리지효과 검정에 해당하는 M(2,1)검정도 GMM(2,1)검정보다 기각율이 높다. 이는 HL검정의 M(1,2), M(2,1)이 비대칭성에 민감한 특성이 있음을 보여준다. 2차 4차 적률에 대한 검정에서는 HL검정과 GMM검정의 검정력이 유사한 것으로 볼 수 있다. McLeod-Li검정과 Engle-LM검정은 표본내검정력이 HL

검정의 $M(2,2)$, $GMM(2,2)$ 의 절반정도로 낮지만 표본외검정력은 $GMM(2,2)$, $M(2,2)$ 의 기각율과 크게 차이나지 않는 것으로 나타나고 있다. 그리고 [표 4.2] (B)에 수록된 통계량들의 검정력 모의실험결과는 표본내검정과 표본외검정에서 HL검정(Q)통계량의 전반적인 검정력이 특정 모형설정오류를 검정하는 전통적인 검정보다 더 좋다고 할 수 없음을 보여주고 있다.

이상의 모의실험결과는 일양성을 검정하는 Kolmogorov-Smirnov검정(KS), Cramer-von-Mise검정(CvM)을 제외한 고전적 검정들에서 파라미터 추정에 따른 불확실성으로 인한 사이즈왜곡 문제가 심각하지 않음을 보여주고 있다. 또한 모의실험결과는 특정 측면의 모형설정오류를 검정하는 고전적 진단통계량들의 검정력이 Hong-Li옵니버스검정(Q)보다 좋을 수 있음을 보여준다. 이와 같은 모의실험결과는 일간자료와 같은 고빈도자료를 이용한 확률변동성 모형 진단에 Jarque-Bera검정, Ljung-Box검정, McLeod-Li검정, 적률조건에 대한 GMM검정 등의 고전적 검정들과 Hong-Li옵니버스검정을 상호보완적으로 이용할 수 있음을 보여준다. 그리고 이러한 결과는 HL검정과 같은 비모수검정에 익숙하지 않은 경우, 다양한 적률조건에 대한 GMM검정을 확률변동성모형

[표 4.1] 모의실험 결과

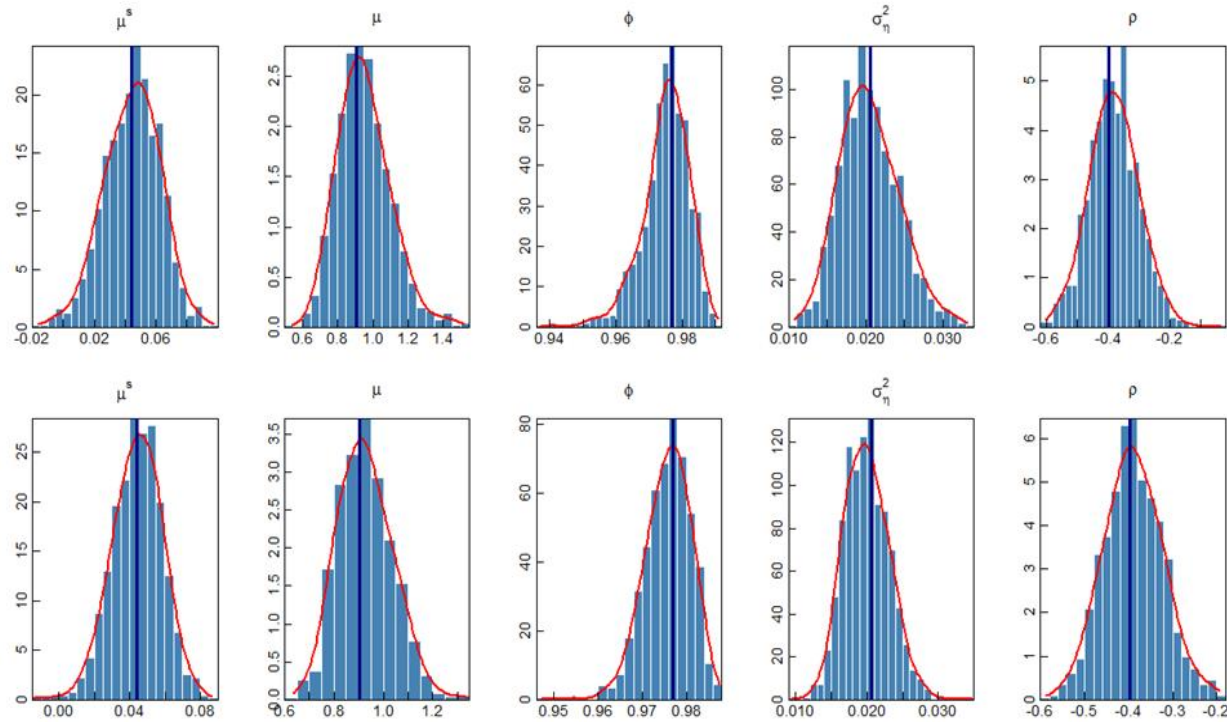
	μ^s	μ	ϕ	σ_η^2	ρ	$Wald_0$	$Wald_{01}$	$RMSE(\sqrt{v_t})$	$MAPE(\sqrt{v_t})$
True	0.0444	0.9052	0.9769	0.020564	-0.3974				
(A) $T = 2000$									
Mean	0.0443	0.9522	0.9751	0.0206	-0.3839	0.0782	0.1400	0.1454	14.9848
SD	0.0177	0.1468	0.0070	0.0038	0.0801			0.0095	1.1767
HPD95	(0.0085, 0.0757)	(0.6812, 1.2193)	(0.9614, 0.9868)	(0.0136, 0.0281)	(-0.5464, -0.2277)				
RMSE	0.0177	0.1541	0.0072	0.0038	0.0812				
(B) $T = 3000$									
Mean	0.0444	0.9266	0.9758	0.0200	-0.3897	0.0790	0.1290	0.1459	14.9989
SD	0.0141	0.1102	0.0052	0.0031	0.0664				
HPD95	(0.0151, 0.0696)	(0.7404, 1.1531)	(0.9664, 0.9855)	(0.0141, 0.0256)	(-0.5152, -0.2526)				
RMSE	0.0141	0.1122	0.0053	0.0032	0.0668				

주) (A)와 (B)패널의 2열~6열에는 각각 $T = 2000$, $T = 3000$ 의 자료를 분석하여 얻은 파라미터들의 사후평균의 평균(mean), 표준편차(standard deviation), 95%HPD구간(highest posterior density interval), RMSE(root mean squared error)를 수록하였다. 그리고 7열과 8열의 $Wald_0$ 와 $Wald_{01}$ 는 각각 다음과 같은 회귀식의 계수에 대한 $H_0 : a = 0$ 과 $H_0 : a = 0, b = 1$ 의 귀무가설에 대한 5%유의수준 Wald검정의 기각율(rejection rate)을 나타낸다.

$$(a) \sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t} = a + e_t \quad , \quad (b) \sqrt{v_t^{true}} = a + b\sqrt{\bar{v}_t} + u_t$$

여기에서 $\sqrt{v_t^{true}}$ 는 참변동성을, $\sqrt{\bar{v}_t}$ 는 변동성의 사후평균을 나타낸다. 계수의 유의성을 검정하는 Wald검정에는 ‘quadratic spectral kernel’과 ‘automatic lag selection’을 이용하여 얻은 Andrews (1991), Andrews and Monahan (1992)의 HAC공분산행렬(Heteroscedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix)을 이용하였다. 그리고 9열과 10열에는 $\sqrt{v_t}$ 의 사후평균의 성과를 측정하기 위한 $RMSE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \left(\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t} \right)^2$ 와 $MAPE(\sqrt{v_t}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \left(\left[\sqrt{v_t^{true}} - \sqrt{\bar{v}_t} \right] / \sqrt{v_t^{true}} \right) \times 100$ 의 사후평균에 대한 요약통계량을 수록하였다.

[그림 4.1] 모의실험 결과



주) [그림 4.1]의 1행과 2행에는 각각의 파라미터들의 사후평균의 히스토그램과 함께 커널확률밀도함수(empirical kernel density)를 도시하였다. 1행과 2행은 각각 표본크기 $T = 2000$, $T = 3000$ 인 자료를 분석한 1000회의 모의실험 결과를 도시한 것이다. [그림 4.1]에서 수직선은 참파라미터값(true parameter values)을 나타낸다.

[표 4.2] 사이즈 및 검정력 분석 결과

significance level	(A) 사이즈								(B) 검정력							
	표본내검정				표본외검정				표본내검정				표본외검정			
	R=2000		R=3000		R=2000, P=1000		R=3000, P=1000		R=2000		R=3000		R=2000, P=1000		R=3000, P=1000	
	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1
M(1,1)	0.111	0.193	0.056	0.120	0.330	0.510	0.296	0.479	0.525	0.675	0.644	0.752	0.576	0.717	0.595	0.728
M(2,2)	0.027	0.046	0.022	0.049	0.021	0.053	0.030	0.056	0.235	0.339	0.386	0.509	0.110	0.195	0.136	0.218
M(3,3)	0.019	0.035	0.018	0.043	0.012	0.041	0.018	0.043	0.136	0.212	0.215	0.327	0.067	0.109	0.077	0.139
M(4,4)	0.016	0.038	0.019	0.045	0.011	0.039	0.012	0.033	0.081	0.141	0.141	0.209	0.049	0.083	0.067	0.105
M(1,2)	0.059	0.112	0.048	0.096	0.093	0.198	0.093	0.174	0.408	0.537	0.588	0.702	0.307	0.419	0.304	0.428
M(2,1)	0.055	0.104	0.041	0.084	0.090	0.187	0.091	0.177	0.422	0.532	0.575	0.698	0.289	0.412	0.309	0.438
W	0.192	0.217	0.152	0.167	0.386	0.417	0.328	0.348	0.590	0.618	0.731	0.751	0.592	0.623	0.571	0.602
Q	0.073	0.105	0.064	0.096	0.114	0.170	0.103	0.144	0.207	0.288	0.281	0.36	0.223	0.291	0.209	0.285
berkowitz	0.033	0.062	0.022	0.051	0.089	0.144	0.071	0.134	0.606	0.697	0.772	0.834	0.443	0.533	0.389	0.494
JB	0.039	0.073	0.042	0.074	0.069	0.120	0.054	0.106	0.993	0.996	1	1	0.830	0.869	0.817	0.867
LjungBox(10)	0.054	0.100	0.051	0.110	0.051	0.105	0.042	0.094	0.313	0.448	0.511	0.633	0.147	0.249	0.156	0.253
McLeod-Li(10)	0.044	0.098	0.046	0.098	0.063	0.103	0.062	0.104	0.100	0.180	0.134	0.231	0.117	0.180	0.103	0.162
Engle-LM(10)	0.043	0.093	0.045	0.094	0.056	0.096	0.056	0.102	0.100	0.171	0.131	0.230	0.120	0.177	0.104	0.161
KS	0.000	0.000	0.000	0.001	0.105	0.181	0.071	0.137	0.008	0.031	0.011	0.070	0.186	0.297	0.165	0.271
CvM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.117	0.204	0.079	0.159	0.001	0.015	0.007	0.048	0.182	0.301	0.160	0.275
Pearson-Chisq	0.025	0.061	0.029	0.054	0.100	0.162	0.056	0.126	0.144	0.224	0.168	0.292	0.159	0.262	0.151	0.234
GMM(0,0)	0.035	0.050	0.014	0.034	0.197	0.278	0.160	0.233	0.524	0.696	0.797	0.899	0.435	0.561	0.356	0.508
GMM(1,1)	0.057	0.095	0.047	0.119	0.061	0.109	0.052	0.093	0.597	0.703	0.801	0.866	0.354	0.486	0.339	0.464
GMM(2,1)	0.046	0.087	0.039	0.064	0.148	0.206	0.133	0.198	0.105	0.166	0.120	0.194	0.259	0.334	0.235	0.310
GMM(1,2)	0.054	0.104	0.044	0.093	0.057	0.111	0.064	0.108	0.054	0.106	0.052	0.118	0.044	0.098	0.046	0.107
GMM(2,2)	0.045	0.084	0.027	0.070	0.049	0.102	0.053	0.094	0.230	0.290	0.273	0.371	0.163	0.236	0.147	0.219
GMM(3,3)	0.033	0.074	0.037	0.088	0.041	0.092	0.037	0.08	0.143	0.238	0.161	0.262	0.093	0.168	0.071	0.161
GMM(4,4)	0.116	0.182	0.091	0.146	0.076	0.147	0.087	0.153	0.279	0.361	0.301	0.367	0.205	0.282	0.183	0.285
GMM-joint	0.458	0.544	0.328	0.417	0.659	0.731	0.624	0.692	0.824	0.882	0.942	0.970	0.781	0.834	0.756	0.826

주) 표는 Hong-Li옴니버스검정, Kolmogorov-Smirnov검정(KS), Cramer-von-Mise검정(CvM), Pearson-Chisquare검정(Pearson-Chisq), Jarque-Bera검정(JB), Berkowitz-tail검정(berkowitz), Ljung-Box검정, McLead-Li검정, Engle-LM검정, 그리고 $z_t(\psi)$ 의 정규성검정에 이용되는 1 4차 적률조건(GMM(0,0))과 부록 B에서 논의한 (B.12)의 적률조건들에 대한 개별 GMM검정들(GMM(1,1), GMM(2,1), GMM(1,2), GMM(2,2), GMM(3,3), GMM(4,4))과 결합 GMM검정(GMM-joint)의 5%와 10%유의수준하의 기각율을 수록한 것이다. Ljung-Box검정, McLead-Li검정 그리고 Engle-LM검정 카이제곱검정통계량의 자유도는 10이다. 그리고 (B.12)의 적률조건들에서 시차는 $k = 3$ 으로 설정한 검정결과이다.

진단에 이용할 수 있음을 보여준다. 이와 같은 모의실험결과는 일간자료와 같은 비교적 큰 크기의 고빈도자료를 분석하는 경우 전통적인 검정통계량이 파라미터 추정에 따른 불확실성에 크게 영향을 받지 않을 수 있다는 Diebold et al. (1998)과 Berkowitz (2001)의 주장을 뒷받침해준다.

4.2 실증분석

본 절에서는 본 연구에서 제시한 알고리즘을 이용한 실증분석 결과와 함께 앞서 논의한 다양한 통계량들을 이용한 모형 진단 결과를 제시한다. 실증분석 자료로는 2001년 01월 02일 2012년 12월 30일 기간의 HSCE지수(Hang Seng China enterprise index)의 로그차분수익률 $r_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1})$ 을 이용하였다. 자료의 크기는 $T = 2925$ 이다. [그림 4.2]에 분석기간의 HSCE지수와 그 수익률, [표 4.3]에 수익률의 요약통계량이 수록되어 있다.

모형추정을 위해 먼저 AR(1)필터를 이용하여 자료를 필터링하였다. 그리고 모의실험에서와 동일한 사전확률밀도함수를 설정하였다. 베이지언 추론에는 총 12만개의 사후표본을 생성한 후, 초기 2만개의 표본을 제외한 나머지 10만개의 표본에서 5개마다 하나씩 취해 얻어지는 2만개의 사후표본을 베이지언 추론에 이용하였다. [표 4.4]의 2열에는 식 (2.11)의 오일러이산화 확률변동성모형(이하 SV모형)에 대한 베이지언추정 결과가 수록되어 있다. [표 4.4]의 각 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 2행 ()안의 수치는 표준편차¹⁸, 3행 [,]안의 수치는 95% HPD구간, 4행 {}안의 수치는 사후표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량(Geweke's convergence diagnostic, 이하 CD)을 나타낸다. 수렴진단통계량 CD는 표준정규분포를 따른다. 그리고 [표 4.4]의 마지막 행의 $\log(BF_{ij})$ 는 2열의 SV모형

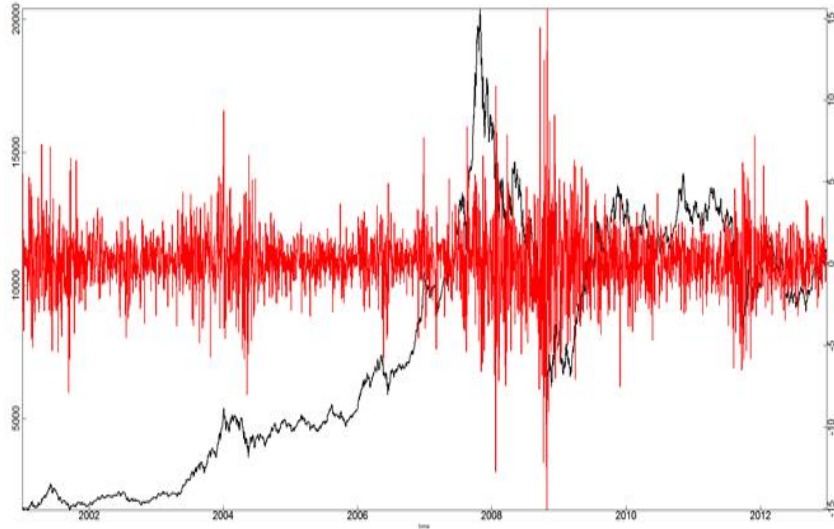
¹⁸ [표 4.4]에 수록된 사후표본 표준편차는 Andrews (1991)의 'automatic lag selection'과 'quadratic spectral kernel'로 구한 HAC공분산을 이용하여 구한 표준편차이다.

과 해당 열의 모형을 비교하는 로그베이즈팩터(log of Bayes factor)를 나타낸다. [그림 4.3]의 (A)패널에 SV모형 파라미터들의 사후표본을 요약한 그래프들이 수록되어 있다. [그림 4.3]에서 1열 4열은 사후표본의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관플롯(autocorrelation plot), 히스토그램과 커널확률밀도함수(empirical kernel density), 사후표본의 수렴여부를 판단할 수 있는 Bauwens and Lubrano (1998)의 CUSUM플롯을 도시한 것이다.

[표 4.4]의 1열에 수록된 Geweke-CD와 [그림 4.3]의 (A)패널 4열에 수록된 CUSUM플롯들은 사후표본들의 수렴을 보여주고 있다. [표 4.4]의 1열에서 파라미터 μ^s 와 μ 의 사후평균과 95% HPD구간을 보면 r_t 의 비조건부 평균과 분산을 잘 설명하고 있음을 알 수 있다. 그리고 ρ 의 사후평균은 약 -0.3으로 비교적 약한 비대칭성을 보이고 있다. 그리고 ϕ 는 일간자료의 전형적인 특징 가운데 하나인 강한 변동성 지속성을 보여주고 있다.

다음으로 [표 4.5] 좌측패널과 우측패널에 수록된 모형 진단통계량을 살펴보자. 진단통계량들은 3절에서 논의한 보조파티클필터를 이용하여 얻은 PIT $u_t(\psi)$ 와 PIT의 정규분포역변환을 통해 얻은 $z_t(\psi)$ 를 이용한 것이다. [표 4.5]의 좌측패널에는 고전적 접근법에서 모형 진단에 이용되는 5% 분위(quantile)에서의 Berkowitz tail검정(berkowitz-L, berkowitz-R), Jarque-Bera검정, 자유도 10의 카이제곱분포를 따르는 Ljung-Box검정, McLeod-Li검정, Engle-LM검정, 그리고 1차 4차 적률조건과 시차 $k = 5$ 로 설정한 (B.12)의 적률조건들에 대한 GMM검정과 그 결합검정 결과를 수록하였다. 그리고 [표 4.5]의 우측패널에는 시차 30을 이용한 Hong-Li옴니버스검정 통계량을 수록하였다. 시차 20과 40에서도 비슷한 크기의 검정통계량을 얻을 수 있다. [표 4.5]의 우측패널에서 회색으로 표시된 것은 5% 유의수준에서 유의함을 나타낸다. 먼저 우측패널 1열의 Hong-Li검정을 보면 5% 유의수준의 임계값 1.64

[그림 4.2] HSCE지수 추이 및 수익률 (2001/01/02 2012/12/30)



주) 그림에서 좌측은 지수수준을 그리고 우측은 로그차분수익률 $r_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1})$ 을 나타낸다.

[표 4.3] HSCE지수 수익률 요약 통계량

평균	표준편차	최대값	최소값	왜도 (skewness)	첨도 (kurtosis)	JB	LB(10)	ML(10)
0.0669	2.1185	-15.0873	15.6056	0.0122	8.8752	4206.951 (0.0000)	27.2163 (0.0024)	1931.9 (0.0000)

주) [표]에서 JB는 자유도2의 Jarque-Bera정규성검정통계량을 그리고 LB(10)과 ML(10)은 자유도 10의 Ljung-Box통계량과 McLeod-Li통계량을 나타낸다. 각 통계량 아래 ()안의 수치는 p값(p-values)이다.

보다 작으므로 유의하지 않음을 알 수 있다. 이와 달리 좌측 패널에 수록된 Jarque-Bera검정과 Berkowitz' right tail검정, McLeod-Li검정, Engle-LM검정, GMM(2,1)검정은 5% 유의수준에서 유의한 것으로 나타나고 있다. McLeod-Li검정, Engle-LM검정, GMM(2,1)검정은 변동성 동학의 설정오류가, Jarque-Bera검정과 Berkowitz' right tail검정은 분포에 대한 설정오류가 있을 수 있음

을 보여주고 있다. 공간을 절약하기 위해 표에는 수록하지 않았지만 GMM(2,1) 검정이 유의한 것은 양부호사이즈편의(positive size bias)에 해당하는 식 (B.12)의 (g)적률조건이 유의한 것에 따른 것이다.

앞서 살펴본 고전적 검정결과를 반영하여 다음과 같은 두 가지 수익률방정식에 대한 모형확장을 통해 식 (2.11)의 모형을 개선해볼 수 있다.

$$\begin{cases} r_t = \mu^s + \sqrt{v_t} \varepsilon_t + \xi_t J_t \\ \xi_t \sim N(\mu_J, \sigma_J^2) \quad , \quad J_t \sim \text{Bern}(\lambda_J) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} r_t = \mu^s + \sqrt{\lambda_t} \sqrt{v_t} \varepsilon_t \\ \lambda_t \sim \text{IG}(v/2, nu/2) \end{cases} \quad (4.5)$$

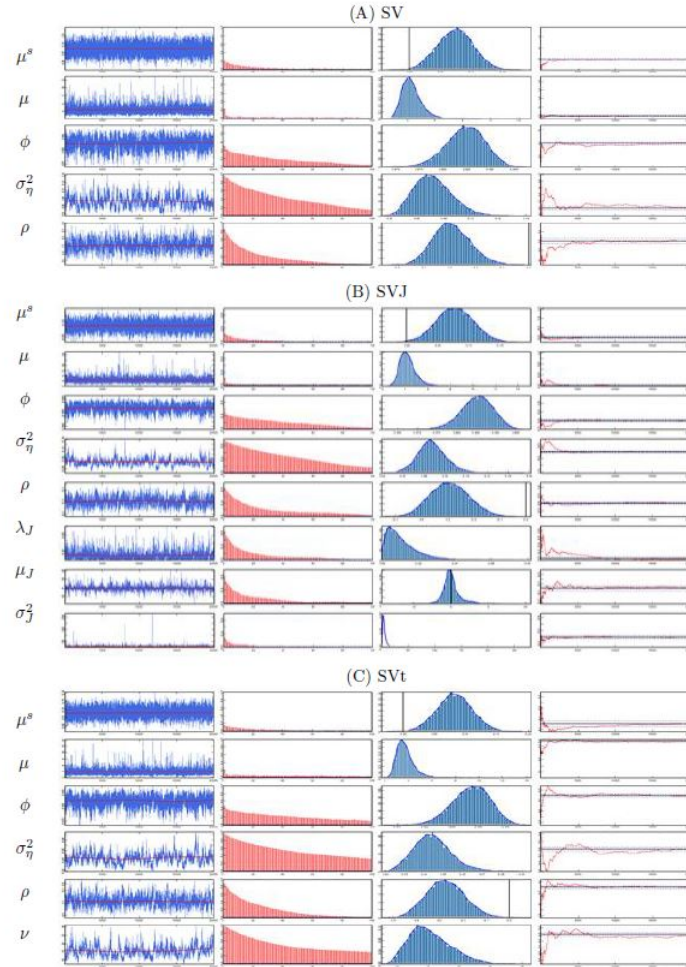
식 (4.4)에서 ξ_t 는 점프를, J_t 는 점프발생(jump arrival) 확률변수를, 그리고 μ_J 와 σ_J^2 는 점프사이즈의 평균과 분산을 나타낸다. J_t 는 λ_J 확률로 1의 값을 가지는 베르누이분포를 따른다. 식 (4.5)는 정규분포에 대한 스케일 혼합(scale mixture)으로 $t_{v|(0,1)}$ 분포를 설정한 것인데, 스케일 혼합성분 λ_t 는 형태파라미터와 스케일파라미터가 $v/2$ 인 역감마분포를 따른다. 식 (4.4)는 Bates (2000)과 Eraker et al. (2003) 등에서 제시된 수익률방정식에 포아송점프를 포함하는 연속시간 확률변동성모형의 오일러이산화모형에 해당한다. 그리고 식 (4.5)는 이산시간 확률변동성모형에서 두꺼운 꼬리를 가지는 수익률분포를 설명하기 위해 $t_{v|(0,1)}$ 분포를 이용한 것이다. 옵션가격결정에서는 이와 같은 특성을 가지는 연속시간과정으로 VG과정(variance gamma process)이 이용된다. 식 (4.5)는 VG과정의 이산화과정에 비대칭성이 없다는 제약을 부과한 것으로 볼 수 있다. 논의의 편의를 위해 이하에서 식 (4.4)와 식 (4.5)의 확장모형을 각각 SVJ모형과 SVt모형이라 하기로 한다.

[표 4.4] 확률변동성모형에 대한 베이즈언추론 결과

	SV	SVJ	SVt
μ^s	0.0740	0.0773	0.0827
	(0.0357)	(0.0419)	(0.0333)
	[0.0181, 0.1304]	[0.0184, 0.1388]	[0.0276, 0.1394]
	{ -1.2013 }	{ -1.0382 }	{ -1.3417 }
μ	4.3141	4.2115	3.7414
	(0.9724)	(0.9822)	(1.0216)
	[2.9933, 5.8512]	[2.9070, 5.7373]	[2.4522, 5.3409]
	{ -0.1396 }	{ 0.9993 }	{ -1.1860 }
ϕ	0.9847	0.9851	0.9885
	(0.008)	(0.0081)	(0.0065)
	[0.9764, 0.9930]	[0.9768, 0.9931]	[0.9814, 0.9953]
	{ -0.2440 }	{ -0.6208 }	{ 0.4247 }
σ_η^2	0.0723	0.068	0.04457
	(0.0696)	(0.0774)	(0.0524)
	[0.0456, 0.1000]	[0.0396, 0.0980]	[0.0256, 0.0644]
	{ 0.5686 }	{ 1.0875 }	{ -0.9669 }
ρ	-0.2913	-0.2915	-0.2741
	(0.2259)	(0.2339)	(0.2848)
	[-0.4312, -0.1491]	[-0.4313, -0.1439]	[-0.4353, -0.1107]
	{ -1.3958 }	{ -0.3748 }	{ 0.20530 }
λ_J		0.0114	
		(0.0295)	
		[0.00006, 0.0298]	
		{ 1.4179 }	
μ_J		0.019	
		(6.3654)	
		[-4.3800, 6.0660]	
		{ 1.2955 }	
σ_J^2		5.2719	
		(6.6643)	
		[0.9395, 12.6644]	
		{ 0.2526 }	
v			15.39
			(3.3780)
			(9.6510, 22.1915)
			{ -0.7890 }
$\log(BF_{ij})$		1.6444	-6.0916
		[1.5777, 1.7070]	[-6.7989, -5.6814]

주) 표의 각 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 1행 ()안의 수치는 표준편차, 3행 [,]안의 수치는 95% HPD구간, 4행 { }안의 수치는 사후표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량(Geweke's convergence diagnostic, CD)을 나타낸다. 수렴진단통계량 CD는 표준정규분포를 따른다. 그리고 마지막 행의 $\log(BF_{ij})$ 는 2열의 SV모형과 해당 열의 모형을 비교하는 로그베이즈팩터(log of Bayes factor)를 나타낸다. [,]의 안의 수치는 95% 신뢰구간을 나타낸다.

[그림 4.3] 확률변동성모형 파라미터들의 사후표본의 특성



주) 각 패널의 1열 4열은 각각 사후표본의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관플롯 (autocorrelation plot), 히스토그램과 커널확률밀도함수(empirical kernel density), 사후표본의 수렴여부를 판단할 수 있는 Bauwens and Lubrano (1998)의 CUSUM 플롯을 도시한 것이다.

본 연구의 알고리즘과 Eraker et al. (2003)의 알고리즘을 결합하면 SVJ모형에 대한 베이지언추론 알고리즘을 얻을 수 있다. SVt모형의 경우에는 식 (4.5)를 반영하여 기본적인 알고리즘에서 $\{\Psi, \{\nu_t\}_{t=1}^T\}$ 의 사후조건부확률밀도함수

[표 4.5] 확률변동성모형 진단

	SV	SVJ	SVt		SV	SVJ	SVt
berkowitz[2]-L	1.9895 (0.3698)	1.1030 (0.5761)	0.0447 (0.9779)				
berkowitz[2]-R	10.5879 (0.0050)	10.1279 (0.0063)	3.7400 (0.1541)				
JB	11.8270 (0.0027)	9.1184 (0.0105)	0.3975 (0.8197)				
Ljung-Box[10]	11.8967 (0.2920)	12.0830 (0.2795)	12.8453 (0.2325)				
McLeod-Li[10]	24.0041 (0.0076)	29.7473 (0.0009)	38.1691 (0.0000)				
Engle-LM[10]	23.1779 (0.0101)	27.9502 (0.0018)	34.0948 (0.0002)				
GMM(0,0)[4]	8.2736 (0.0821)	6.8935 (0.1416)	1.1000 (0.8943)				
GMM(1,1)[5]	1.4198 (0.9221)	1.6133 (0.8996)	2.1430 (0.829)	M(1,1)	0.8326	0.8565	0.9077
GMM(2,1)[15]	26.3007 (0.0350)	28.6617 (0.0178)	28.6722 (0.0177)	M(2,1)	0.8312	0.8754	0.9499
GMM(1,2)[5]	3.1296 (0.6800)	3.2366 (0.6636)	3.1410 (0.6783)	M(2,2)	-0.0324	-0.006	0.0543
GMM(2,2)[5]	9.7148 (0.0837)	10.8493 (0.0545)	14.0542 (0.0153)	M(1,2)	0.0318	0.058	0.136
GMM(3,3)[5]	1.0331 (0.9599)	1.2960 (0.9353)	1.8980 (0.8631)	M(3,3)	-0.2544	-0.2359	-0.1925
GMM(4,4)[5]	6.2174 (0.2856)	7.0129 (0.2197)	10.7140 (0.0574)	M(4,4)	-0.4019	-0.3873	-0.3528
GMM-Joint[44]	56.2558 (0.1018)	60.0879 (0.05361)	68.6825 (0.0101)	W	-3.8716	-4.159	-5.9138
				Q	0.4833	0.2936	-0.4342

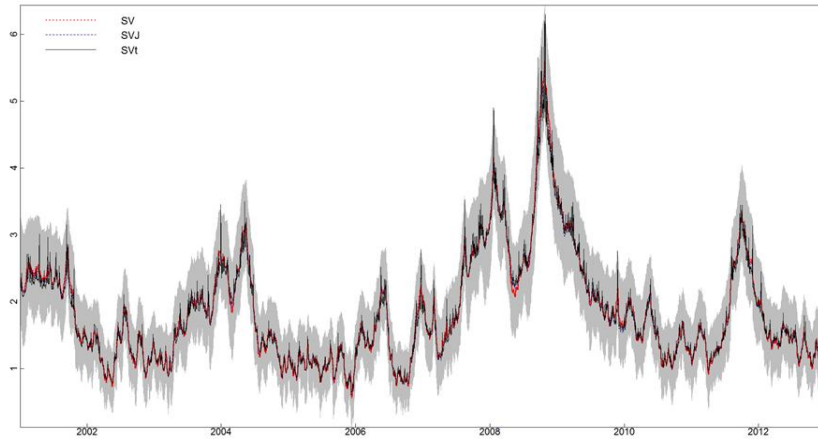
주) 표에서 ()안의 수치는 해당 검정통계량의 P값을 나타낸다. 그리고 1열에서 통계량옆의 []안의 수치는 해당통계량의 자유도를 나타낸다. 표의 좌측에는 고전적 접근법의 진단통계량을, 우측 패널에는 Hong-LI옴니버스 검정통계량을 수록하였다. 회색으로 표시된 부분은 5%유의 수준에서 유의한 검정통계량을 나타낸다.

에 포함된 수익률방정식을 수정하는 방법으로 v_t 를 사후표본추출할 수 있다.

$\{\lambda_t\}_{t=1}^T, v\}$ 의 사후표본추출 알고리즘은 부록 D에 수록되어 있다. SVJ모형과 SVt모형에 추가적으로 포함된 파라미터들의 사전확률밀도함수를 다음과 같이 설정하였다.

$$\pi(\lambda_J) = \text{Beta}(2, 40), \pi(\mu_J) = N(0, 100), \pi(\sigma_J^2) = \text{IG}(5, 20), \pi(v) = G(5, 1/2)$$

[그림 4.4] 사후변동성 비교



주) 그림에서 점선은 SV모형, 1점쇄선은 SVJ모형, 실선은 SVt모형의 변동성의 사후평균을 나타내며, 회색으로 표시된 부분은 SV모형의 확률변동성의 90% HPD구간을 나타낸다. SV모형, SVJ모형, SVt모형의 변동성은 각각 $\sqrt{v_t}$, $\sqrt{v_t + J_t(\mu_J^2 + \sigma_J^2)}$, $\sqrt{v_t \lambda_t}$ 와 같이 정의된다.

여기에서 $Beta(a, b)$ 는 형태파라미터가 a, b 인 베타분포를 나타낸다. SV모형에서와 같이 총 12만개의 사후표본을 생성한 후, 초기 2만개의 표본을 제외하고 나머지 10만개의 표본에서 5개마다 하나씩 취해 얻어지는 2만개의 사후표본을 베이지언 추론에 이용하였다.

[표 4.4]의 3열과 4열, [그림 4.3]의 (B), (C)패널에는 SVJ모형과 SVt모형에 대한 베이지언 추론 결과가 수록되어 있다. [표 4.4]의 Geweke CD와 [그림 4.3]의 CUSUM플롯을 보면, 사후표본의 수렴에 문제가 없음을 알 수 있다. SVJ모형 추정결과를 보면, 점프성분을 포함하도록 모형을 확장하더라도 전반적인 추정결과가 SV모형과 차이가 없을 수 있다. 이는 [표 4.4]에 수록된 모형 진단에서도 나타나고 있다. 이와 달리 SVt모형의 경우, Jarque-Bera 검정과 berkowitz-tail검정이 유의하지 않다. 따라서 두꺼운 꼬리를 가지는 모

형으로 확장이 수익률의 동태적 특성을 설명하는데 도움이 됨을 알 수 있다. 하지만 양부호사이즈편의를 포착한 GMM(2,1)검정은 여전히 유의한 것으로 나타나고 있다. [표 4.5]의 우측패널에 수록된 Hong-Li검정은 SVJ모형과 SVt 모형 모두 유의하지 않다. [표 4.3]의 마지막 행에 수록된 로그베이즈팩터¹⁹를 통해서도 이와 같은 결과를 확인할 수 있다. $2\ln BF_{BF}$ 이 2 6, 6 10 그리고 10 보다 큰 경우, 각각 ‘positive’, ‘strong’, ‘very strong’ 한 것으로 해석할 수 있다 (Kass and Raftery (1995)). SV모형과 SVJ모형을 비교하는 로그베이즈팩터가 1.6444로 오히려 SV모형이 더 좋다는 약한 증거를 보여 주고 있다. 이와 달리 SV모형과 SVt모형을 비교하는 로그베이즈팩터는 약 -6.1로 SVt모형이 더 좋다는 매우 강한 증거를 보여주고 있다. 2008년 미국 금융위기와 2010년 유럽 재정위기가 분석기간에 포함되어 있음에도 불구하고 SVJ모형보다 SV모형이 더 좋다는 결과는 일반적으로 도약과정으로 이러한 위기를 포착할 수 있다는 직관과 부합되지 않는다. 그러나 이는 비조건부분산이 4.3으로 추정될 정도로 HSCE지수 수익률의 변동성이 크기 때문인 것으로 볼 수 있다.

[그림 4.4]는 각 모형의 변동성에 대한 사후평균을 도시한 것이다. SV모형, SVJ모형 그리고 SVt모형의 변동성은 각각 $\sqrt{v_t}$, $\sqrt{v_t + J_t(\mu_f^2 + \sigma_f^2)}$, $\sqrt{v_t} \lambda_t$ 이다. [그림 4.4]에서 점선은 SV모형, 일점쇄선은 SVJ모형, 실선은 SVt모형의 변동성 사후평균을, 그리고 회색으로 표시된 부분은 SV모형 변동성의 90% HPD 구간을 나타낸다. [그림 4.4]를 보면, 각 모형의 변동성 추정치들이 매우 유사하므로 이들을 구분하는 것이 쉽지 않다. 모형 선택과 모형 개선은 분석목적에 따라 달라질 수 있다. 이와 관련된 모형비교는 본 논문의 주제를 벗어나므로

¹⁹ Eraker et al. (2003)에 제시된 SDDR(Savage-Dickey Density Ratio)을 이용하는 방법으로 SV모형과 SVJ모형을 비교하는 베이즈팩터를 계산할 수 있다. 그리고 Jacquier et al. (2004)에 제시된 방법으로 SV모형과 SVt모형을 비교하는 베이즈팩터를 계산할 수 있다. 자세한 논의에 대해서는 Eraker et al. (2003)과 Jacquier et al. (2004)을 참고하기 바란다. 베이즈팩터 계산에는 사후표본들이 이용되므로 가능한 한 많은 그리고 종속성이 작은 사후표본을 이용할수록 보다 정확한 베이즈팩터를 얻을 수 있다.

더 이상 논의하지 않기로 한다. 그러나 모형 진단과 개선을 통해 알 수 있듯이 자료생성과정의 특정 측면을 진단하는 고전적 접근법의 진단통계량들이 유용함을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구는 Feller제곱근 확률변동성모형에 대한 새로운 베이지언 추론 알고리즘을 제시하고 모의실험을 통해 제시된 알고리즘이 Feller제곱근 확률변동성모형 추정에 효과적임을 보였다. 이와 함께 본 연구는 파티클필터를 통해 얻은 PIT를 이용한 확률변동성모형 진단 통계량의 사이즈와 검정력에 대한 광범위한 모의실험 결과를 제시하였다. 본 연구는 Feller제곱근과정 확률변동성모형의 수익률과 조건부분산의 결합확률밀도함수로부터 얻어지는 조건부분산의 GIG분포 확률커널을 정규분포로 근사하여 조건부분산 생성을 위한 MH알고리즘 후보생성확률밀도함수를 유도한다. 기존 알고리즘과 달리 본 연구의 조건부분산 사후표본생성 알고리즘은 RWMH알고리즘에 비해 계산상의 부담이 그리 크지 않을 뿐만 아니라 도약과정을 포함하는 확장모형에도 쉽게 적용가능하다. 그리고 파라미터 추정에 따른 불확실성에 영향을 받지 않는 대표적인 비모수 검정인 Hong and Li (2005) 검정과 기존 연구들에서 이용된 일반화된 잔차의 정규성을 이용한 고전적 검정들의 사이즈와 검정력에 대한 비교모의실험 결과, 조건부분포의 특정 측면의 모형설정오류를 검정하는 고전적 검정들의 사이즈왜곡이 심각하지 않을 수 있으며, 검정력 또한 Hong-Li 옴니버스검정(Q)보다 좋을 수 있는 것으로 나타났다. 고전적 접근법의 진단들에 대한 모의실험 결과는 Hong and Li (2005) 검정과 같은 비모수검정에 익숙하지 않을 때 일반화된 잔차의 정규성 적률조건과 다양한 조건부 적률조건에 대한 GMM검정을 이용할 수 있음을 보여준다. 이러한 모의실험 결과는

일간자료와 같은 비교적 큰 크기의 고빈도자료를 분석하는 경우 고전적 검정통계량들이 파라미터 추정에 따른 불확실성에 크게 영향을 받지 않을 수 있다는 Diebold et al. (1998)과 Berkowitz (2001)의 주장을 뒷받침해준다.

부록

A. GIG분포(Generalized inverse Gaussian distribution)

파라미터 $\lambda \in R$, $\chi > 0$, $\psi > 0$ 를 가지는 GIG분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$p(x; \lambda, \chi, \psi) = \frac{((\psi/\chi)^{\lambda/2})}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\chi}{x} + \psi x\right)\right], \quad x > 0 \quad (\text{A.1})$$

여기에서 $K_\lambda(\cdot)$ 는 제3종 λ 차 변형베셀함수(modified Bessel function of the third kind of order λ)를 나타낸다. χ 와 ψ 는 분포의 집중도(concentration)와 스케일(scale)을 결정하는 파라미터인데, $\sqrt{\chi\psi}$ 는 집중도를, $\sqrt{\chi/\psi}$ 는 스케일을 결정한다. [표 A.1]에 요약된 바와 같이 파라미터 λ 의 값에 따라 GIG분포는 inverse Gaussian 분포($\lambda = -\frac{1}{2}$), Lévy분포($\lambda = -\frac{1}{2}, \psi = 0$), reciprocal inverse Gaussian 분포($\lambda = \frac{1}{2}$), hyperbolic 분포($\lambda = 0$), positive hyperbolic 분포($\lambda = 1$), 감마분포($\lambda > 0, \chi = 0$), 역감마분포($\lambda < 0, \psi = 0$) 등의 분포로 축약된다.

[표 A.1] GIG분포의 내포분포(nested distributions)

분포	파라미터 제약		
generalized inverse Gaussian	$\lambda \in R$	$\chi > 0$	$\psi > 0$
gamma	$\lambda > 0$	$\chi = 0$	$\psi > 0$
inverse gamma	$\lambda < 0$	$\chi > 0$	$\psi = 0$
exponential	$\lambda = 1$	$\chi = 0$	$\psi > 0$
positive hyperbolic	$\lambda = 1$	$\chi > 0$	$\psi > 0$
hyperbolic	$\lambda = 0$	$\chi > 0$	$\psi > 0$
inverse gaussian	$\lambda = -1/2$	$\chi > 0$	$\psi > 0$
reciprocal inverse gaussian	$\lambda = 1/2$	$\chi > 0$	$\psi > 0$
Lévy	$\lambda = -1/2$	$\chi > 0$	$\psi = 0$

확률변수 X 가 $X \sim GIG(\lambda, \chi, \psi)$ 이면 $X^{-1} \sim GIG(-\lambda, \psi, \chi)$ 이 성립한다(Barndorff-

Nielson and Halgreen (1977)). 이는 GIG분포를 따르는 확률변수를 생성할 때 이용될 수 있는 중요한 성질이다.

GIG분포의 적률생성함수(moment generating function), n 차적률, 최빈값(mode)은 각각 다음과 같다.

$$M_{GIG}(u) = \left(\frac{\psi}{\psi - u} \right)^{\lambda/2} \frac{K_{\lambda}(\sqrt{\chi(\psi - 2u)})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \quad (\text{A.2})$$

$$E[X^n] = \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{K_{\lambda+n}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \quad (\text{A.3})$$

$$Mode[X] = \frac{\lambda - 1 + \sqrt{(\lambda - 1)^2 + \chi\psi}}{\psi} \quad (\text{A.4})$$

GIG분포에 대한 보다 자세한 논의는 Jørgensen (1982), Paolella (2007) 9장을 참고할 수 있다.

B. 모형설정오류 검정

(1) Hong-Li 검정

Hong and Li (2005)(이하 HL)는 전이확률밀도함수를 이용한 연속시간모형 시계열모형에 대한 비모수 모형설정 검정 방법을 제안하였다. HL검정은 일양성과 독립성의 가정 위반에 대해서 강건한 특성을 가지고 있다. 또한 비모수 검정이므로 파라미터 추정에 따른 불확실성을 추가적으로 고려할 필요가 없다. HL이 제안한 검정법은 이산시간모형에 대해서도 적용될 수 있다. 이들의 검정방법은 다음과 같은 확률적분변환을 통해서 얻어지는 $U_t(\theta)$ 를 이용하는

방법이다.

$$U_t(\theta) \equiv \int f(Y_t | \theta, I_{t-1}) dY_t \quad (B.1)$$

여기에서 $f(\cdot | \theta, I_{t-1})$ 는 모형에서 가정되는 확률밀도함수, Y_t 는 관측치에 해당하는 확률변수, y_t 는 t 기의 관측치, θ 는 파라미터벡터 그리고 I_{t-1} 은 $t-1$ 기까지 이용가능한 정보집합을 나타낸다. 모형설정 오류가 없다는 귀무가설하에 $U_t(\theta)$ 는 독립적이고 동일한 표준일량분포(*i.i.d* $U[0, 1]$)를 따른다(Rosenblatt (1952)).

$U_t(\theta)$ 의 이와 같은 성질을 이용하여 HL은 아래와 같이 정의되는 $\{U_t, U_{t-j}\}$ 의 결합확률밀도함수에 대한 커널추정치(kernel estimator) $\hat{g}(u_1, u_2)$ 와 두 *i.i.d* $U[0, 1]$ 분포의 확률밀도함수의 곱을 비교하는 방법으로 일양성과 독립성을 검정함으로써 모형을 진단하는 방법을 제시하였다.

$$\hat{g}(u_1, u_2) \equiv (n-j)^{-1} \sum_{\tau=j+1}^n K_h(u_1, \hat{U}_\tau) K_h(u_2, \hat{U}_{\tau-j}) \quad (B.2)$$

여기에서 n 은 표본의 크기, $\hat{U}_t \equiv U(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}$ 는 참파라미터(true parameter) θ_0 에 대한 $\sqrt{n}$ 일치추정치이다. 그리고 $K(\cdot, \cdot)$ 는 아래와 같이 경계가 조정된 커널(boundary-modified kernel)이다.

$$K_h(x, y) = \begin{cases} h^{-1} k\left(\frac{x-y}{h}\right) \Big/ \int_{-(x/h)}^1 k(u) du & \text{if } x \in [0, h) \\ h^{-1} k\left(\frac{x-y}{h}\right) & \text{if } x \in [h, 1-h] \\ h^{-1} k\left(\frac{x-y}{h}\right) \Big/ \int_{-1}^{(1-x)/h} k(u) du & \text{if } x \in (1-h, 1] \end{cases} \quad (B.3)$$

여기에서 $k(\cdot)$ 는 대칭인 커널을 나타내며, h 는 $n \rightarrow \infty$ 에 따라 $h \rightarrow 0$, $nh \rightarrow \infty$ 를 충족하는 밴드폭(bandwidth)을 나타낸다. 식 (B.3)의 커널은 HL검정이 일양성

과 독립성 위반에 대해 강건한 특성을 가지는데 있어서 중요한 역할을 한다. HL은 $k(\cdot)$ 로 아래와 같은 quartic kernel을 이용하였다.

$$k(u) = \frac{15}{16}(1-u^2)I(|u| \leq 1) \quad (\text{B.4})$$

HL은 위와 같은 방법으로 구한 $\hat{g}(j)(u_1, u_2)$ 의 커널추정치와 두 *i.i.d* $U[0, 1]$ 분포의 확률밀도함수의 곱, 즉 1에 대한 다음과 같은 이차형식 비교 $\hat{M}(j)$ 을 이용하는 방법을 제시하였다.

$$\hat{M}(j) \equiv \int_0^1 \int_0^1 [\hat{g}_j(z_1, z_2) - 1]^2 dz_1 dz_2 \quad (\text{B.5})$$

위와 같이 얻어지는 $\hat{M}(j)$ 를 이용한 HL 음니버스 검정통계량(omnibus test statistic)은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{Q}(j) \equiv \frac{[(n-j)h\hat{M}(j) - A_0^h]}{V_0^{1/2}} \quad (\text{B.5})$$

여기에서

$$A_0^h \equiv \left[(h^{-1} - 2) \int_{-1}^1 k^2(u) du + 2 \int_0^1 \int_1^b k_b^2(u) du db \right]^2 - 1$$

$$V_0 \equiv 2 \left[\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 k(u+v)k(v) dv \right]^2 du \right]^2, \quad k_b(\cdot) \equiv k(\cdot) / \int_{-1}^b k(v) dv$$

모형설정오류가 없다는 귀무가설 하에 $\hat{Q}(j)$ 는 점근적으로 표준정규분포를 따른다.

$$\hat{Q}(j) \rightarrow N(0, 1) \quad (\text{B.7})$$

또한 귀무가설 하에서 $\{cov[\hat{Q}(i), \hat{Q}(j)] \rightarrow 0 \text{ for } i \neq j\}$ 이므로 HL은 다음과 같은 검정통계량을 이용할 수 있음을 보였다.

$$W(p) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \hat{Q}(j) \quad (\text{B.8})$$

귀무가설 하에 $W(p)$ 는 $\hat{Q}(j)$ 와 마찬가지로 점근적으로 표준정규분포를 따른다.

HL은 $\hat{Q}(j)$ 또는 $W(p)$ 에 대한 옴니버스검정을 통해 귀무가설이 기각되는 경우, 모형설정오류의 원인을 식별할 수 있는 다음과 같은 $M(m, l)$ 검정통계량도 함께 제시하였다.

$$M(m, l) \equiv \left[\sum_{j=1}^{n-1} w^2(j/p)(n-j)^2 \hat{\rho}_{ml}^2(j) - \sum_1^{n-1} w^2(j/p) \right] / \left[2 \sum_{j=1}^{n-2} w^4(j/p) \right]^2 \quad (\text{B.9})$$

여기에서 $\hat{\rho}_{ml}(j)$ 는 $\hat{U}_t^m$ 과 $\hat{U}_{t-|j|}^l$ 의 표본교차상관계수(sample cross-correlation coefficient), $w(\cdot)$ 는 0을 중심으로 대칭이며 연속인 가중함수(weighting function)이다. $p \equiv p(n) \rightarrow \infty$, $\frac{p}{n} \rightarrow 0$ 의 조건이 충족되는 한 $M(m, l)$ 은 귀무가설 하에 점근적으로 표준정규분포를 따른다.

$$M(m, l) \rightarrow N(0, 1) \quad (\text{B.10})$$

식(B.9)와 같이 정의되는 $M(m, l)$ 은 동태적 측면의 모형설정오류를 검정할 수 있는 특징이 있다. HL은 $\{M(1, 1), M(2, 2), M(3, 3), M(4, 4), M(1, 2), M(2, 1)\}$ 를 이용할 것을 제안하였다. HL에 따르면, $M(1, 1)$, $M(2, 2)$, $M(3, 3)$, $M(4, 4)$ 는 각각 수준(level), 변동성(volatility), 왜도(skewness), 첨도(kurtosis)의 자기상관(autocorrelation)을 검정하는 통계량으로 해석할 수 있다. 그리고 $M(1, 2)$,

$M(2,1)$ 는 각각 ‘arch-in-mean’과 ‘leverage effect’를 검정하는 통계량으로 해석할 수 있다.

(2) 정규분포 역변환을 이용한 검정

모형설정 오류를 검정하는 방법으로 HL검정은 모형설정 오류가 없다는 귀무가설 하에서 식 (B.1)이 *i.i.d* $U[0,1]$ 임을 이용하는 검정이다. HL검정은 Hong et al. (2004)의 확률밀도함수 예측성과(density forecast performance) 평가방법을 표본내 모형진단으로 확장한 것이다. 이와 달리 Smith (1985), Kim et al. (1998), Frühwirth-Schatter (1996), Gelarch (1999), Berkowitz (2001)는 다음과 같은 정규분포함수의 역함수로 얻어지는 z_t 가 독립적이고 동일한 표준정규분포를 따른다는 점을 이용하여 예측력을 평가하는 방법을 제시하였다.

$$z_t(\theta) \equiv \Phi^{-1} \left[\int f(Y_t \leq y_t \mid \theta, I_{t-1}) \right] \sim i.i.d. N(0,1) \quad (B.11)$$

여기에서 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 는 표준정규분포함수의 역함수를 나타낸다. 귀무가설하에서 [·]안은 식 (B.1)에서와 같이 독립적이고 동일한 일량분포를 따르므로 이에 대하여 표준정규분포함수의 역함수를 취하여 얻어진 z_t 는 독립적이고 동일한 표준정규분포를 따른다. 이는 역함수를 이용한 표본추출 등에서 일반적으로 이용되는 성질이다. 최우추정치와 같은 파라미터에 대한 $\sqrt{T}$ 일치추정치를 이용하는 경우 z_t 는 점근적으로 독립적이고 동일한 표준정규분포를 따른다. 식 (B.11)을 이용한 예측력평가와 모형진단에는 표본외검정과 표본내검정의 차이만 있을 뿐이다.

식 (B.11)의 성질을 이용하는 경우, 기존 Jarque-Bera검정, Ljung-Box검정, McLeod-Li검정 등의 방법으로 z_t 의 *i.i.d.* $N(0,1)$ 검정을 통해 모형설정을 검

정할 수 있다. 이 경우, Jarque-Bera검정은 모형의 조건부확률밀도함수(conditional probability density function) 설정에 대한 검정에 해당하며, Ljung-Box 검정과 McLeod-Li검정은 모형의 조건부동학 즉, 동태적 측면의 설정에 대한 검정에 해당한다. 특히 HL 옴니버스 검정과 유사한 검정을 하고자 하는 경우, 다음과 같은 적률조건에 대한 GMM검정(generalized method of moments test)을 이용할 수도 있다.

$$\left\{ \begin{array}{ll} E[z_t z_{t-j}] & \cdots (a) \\ E[(z_t^2 - 1)(z_{t-j}^2 - 1)] & \cdots (b) \\ E[z_t^3 z_{t-j}^3] & \cdots (c) \\ E[(z_t^4 - 3)(z_{t-j}^4 - 3)] & \cdots (d) \\ E[z_t(z_{t-j}^2 - 1)] & \cdots (e) \\ E[(z_t^2 - 1)I[z_{t-j} < 0]] & \cdots (f) \\ E[(z_t^2 - 1)I[z_{t-j} < 0]z_{t-j}] & \cdots (g) \\ E[(z_t^2 - 1)I[z_{t-j} \geq 0]z_{t-j}] & \cdots (h) \end{array} \right. \quad \text{for } j = 1, \dots, k \quad (\text{B.12})$$

Richardson and Smith (1993)에서 정규성 검정에 의 1 4차 적률에 대한 GMM 과다식별조건을 이용한 검정이 이용된 이후, 식 (B.12)와 같은 다양한 표준화 잔차의 적률조건을 이용한 GARCH모형 적합성 검정이 이용되었다. 식 (B.12)에서 (a) (d)는 식 (B.11)의 $M(1, 1)$, $M(2, 2)$, $M(3, 3)$, $M(4, 4)$ 통계량에 대응되는 적률조건이며, (e)는 $M(1, 2)$, (f), (g), 그리고 (h)는 $M(2, 1)$ 통계량에 대응되는 적률조건이다. 그리고 표준정규분포의 1차 4차 적률조건과 식 (B.12)의 적률조건을 한꺼번에 결합하여 검정하는 방법으로 식 (B.7)의 $\hat{Q}(j)$ 또는 식 (B.10)의 $W(p)$ 에 대응되는 검정을 할 수도 있다. 소표본에서 식 (B.12)의 적률조건

들을 결합 검정하는 경우 과다기각(over-rejection) 문제가 발생할 수 있음에 주의할 필요가 있다.

앞서 살펴본 HL검정과 달리 식 (B.11)과 같이 PIT에 대한 정규분포역변환을 이용하는 모수적 검정법들은 파라미터추정에 따른 불확실성에 영향을 받을 수 있다. 이러한 파라미터 추정에 따른 불확실성을 반영하기 위해서는 Newey (1985)와 Tauchen (1985)에서 제시된 이론을 확장하여 적용할 필요가 있다 (Bontemps and Meddahi (2005, 2012), Chen(2011) 등). 파라미터 추정에 따른 불확실성을 고려한 PIT를 이용한 모형 진단과 확률예측 평가(density forecast evaluation)에 대한 보다 자세한 논의는 Corradi and Swanson (2006)에 종합적으로 제시되어 있다. 그러나 부트스트랩을 이용하는 검정법들은 계산상의 부담이 지나치게 크기 때문에 본 연구의 확률변동성모형 진단에 적용하는 것이 실질적으로 매우 어렵다. 확률변동성모형 추정을 다루는 기존연구들에서 PIT와 PIT의 정규분포역변환을 이용한 검정을 하는 경우, 파라미터 추정에 따른 불확실성을 고려하지 않고 있다. 이 경우 검정의 사이즈 왜곡(size distortion)이 발생할 수 있다. Berkowitz (2001)는 Diebold et al. (1998)의 모의실험결과에 따라, 일간자료와 같은 비교적 큰 크기의 고빈도자료를 분석하는 경우 검정통계량이 파라미터 추정에 따른 불확실성에 크게 영향을 받지 않을 수 있다고 주장하였다.

C. 보조파티클필터(auxiliary particle filter)

보조파티클필터는 완전적응표본추출(fully adaptive sampling)을 이용하는 최적파티클필터(optimal particle filter)와 밀접한 관련을 가지고 있다. 선형 정규 상태공간모형과 같은 특수한 경우를 제외한 일반적인 비선형 비정규 상태공간모형에 최적파티클필터를 적용하는 것은 실질적으로 불가능하다. 하지만

보조파티클필터의 특성과 밀접하게 관련되어 있으므로 먼저 최적파티클필터를 논의하기로 한다. 최적파티클필터는 다음과 같은 관계를 이용하여 유도될 수 있다.

$$p(y_{t+1}, \alpha_{t+1} | \alpha_{1:t}, y_{1:t}) = p(y_{t+1} | \alpha_{t+1}, y_{1:t}) p(\alpha_{t+1} | \alpha_{1:t}, y_{1:t+1}) \quad (C.1)$$

이를 이용하면 다음과 같이 식 (3.2)의 필터확률밀도함수를 쓸 수 있다.

$$p(\alpha_{1:t+1} | y_{1:t+1}) \propto p(y_{t+1} | \alpha_{1:t}) p(\alpha_{t+1} | \alpha_{1:t}, y_{1:t+1}) p(\alpha_{1:t} | y_{1:t}) \quad (C.2)$$

그리고 $p(\alpha_t | y_{1:t})$ 를 근사하는 $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ 로 $t+1$ 기의 필터확률밀도함수를 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$p(\alpha_{1:t+1} | y_{1:t+1}) \propto \sum_{i=1}^N p(y_{t+1} | \alpha_{1:t}^{(i)}) p(\alpha_{t+1} | \alpha_{1:t}^{(i)}, y_{1:t+1}) w_t^{(i)} = \sum_{i=1}^N \pi_t^{(i)} p(\alpha_{t+1} | \alpha_{1:t}^{(i)}, y_{1:t+1}) \quad (C.3)$$

여기에서 $\pi_t^{(i)} = \frac{p(y_{t+1} | \alpha_{1:t}^{(i)}) w_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N p(y_{t+1} | \alpha_{1:t}^{(j)}) w_t^{(j)}}$ 이다. $t+1$ 시점까지의 전체 상태변수 $\alpha_{1:t+1}$ 이 아닌 $t+1$ 시점의 상태변수 α_{t+1} 가 분석의 초점인 경우 파티클필터링 과정은 매우 단순화될 수 있다. $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 가 주어졌을 때 $\{y_t\}_{t=1}^T$ 들이 서로 독립이고 α_t 가 마르코프 성질을 충족하므로 상태변수에 대한 주변화(marginalization)를 이용하면, 식 (C.1) 식 (C.3)의 조건집합(conditioning set)에 포함된 $\alpha_{1:t}$ 는 α_t 로 축약될 수 있다. $t+1$ 기의 관측치 y_{t+1} 가 관측되었을 때, $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ 를 $\{\alpha_{t+1}^{(i)}, w_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ 로 갱신하는 과정은 [표 C.1]로 요약될 수 있다.

식 (C.3)의 최적파티클필터는 $p(y_{t+1} | \alpha_t)$ 의 예측확률 계산과 $p(\alpha_{t+1} | \alpha_t, y_{t+1})$ 으로부터의 표본추출이 가능할 때에만 이용할 수 있다. 그러나 예외적인 경우를 제외하고 일반적으로 예측확률 $p(y_{t+1} | \alpha_t)$ 의 계산과 $p(\alpha_{t+1} | \alpha_t, y_{t+1})$ 으로부터

[표 C.1] 최적파티클필터(optimal particle filter) 1

- [Step 0] input $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$
 [Step 1] compute the unnormalized weights

$$\tilde{\pi}_t^{(i)} = p(y_{t+1}|\alpha_t^{(i)}) w_t^{(i)} \quad i = 1, \dots, N$$
 and normalize the weights

$$\pi_t^{(i)} = \tilde{\pi}_t^{(i)} / \sum_{j=1}^N \tilde{\pi}_t^{(j)}$$

 [Step 2] resample $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ with the weights $\{\pi_t^{(i)}\}_{i=1}^N$
 [Step 3] draw $\alpha_{t+1}^{(i)} \sim p(\alpha_{t+1}|\alpha_t^{(i)}, y_{t+1})$, $i = 1, \dots, N$
 [Step 4] compute the unnormalized weights

$$\tilde{w}_{t+1}^{(i)} = \frac{p(y_{t+1}|\alpha_{t+1}^{(i)})p(\alpha_{t+1}^{(i)}|\alpha_t^{(i)})}{p(y_{t+1}|\alpha_t^{(i)})p(\alpha_{t+1}^{(i)}|\alpha_t^{(i)}, y_{t+1})}$$
 and normalize the weights

$$w_{t+1}^{(i)} = \tilde{w}_{t+1}^{(i)} / \sum_{j=1}^N \tilde{w}_{t+1}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, N$$

 [Step 5] output $\{\alpha_{t+1}^{(i)}, w_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^N$
-

터의 표본추출은 가능하지 않다. Pitt and Shephard (1999)는 식 (C.3)의 최적 파티클필터 확률밀도함수에 포함된 $p(y_{t+1}|\alpha_t)p(\alpha_{t+1}|\alpha_t, y_{t+1})$ 를 잘 근사하는 후보생성확률밀도함수 $q(y_{t+1}|\alpha_t)q(\alpha_{t+1}|\alpha_t, y_{t+1})$ 를 이용하는 보조파티클필터 (auxiliary particle filter)를 제안하였다. 보조파티클필터는 [표 C.2]로 요약될 수 있다.

Pitt and Shephard (1999)에서 제안된 후보생성확률밀도함수는 다음과 같다.

$$q(y_{t+1}|\alpha_t^{(i)})q(\alpha_{t+1}^{(i)}|\alpha_t^{(i)}, y_{t+1}) \equiv p(y_{t+1}|\hat{\alpha}_t^{(i)})p(\alpha_{t+1}^{(i)}|\alpha_t^{(i)})$$

여기에서 $\hat{\alpha}_t^{(i)}$ 는 $p(\alpha_{t+1}|\alpha_t^{(i)})$ 의 평균, 최빈수(mode), 중위수(median) 등을 나타낸다.

[표 C.2] 보조파티클필터(auxiliary particle filter) 2

[Step 0] input $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$
 [Step 1] compute the unnormalized weights

$$\tilde{\pi}_t^{(i)} = q(y_{t+1}|\alpha_t^{(i)}) w_t^{(i)} \quad i = 1, \dots, N$$
 and normalize the weights

$$\pi_t^{(i)} = \tilde{\pi}_t^{(i)} / \sum_{j=1}^N \tilde{\pi}_t^{(j)}$$

 [Step 2] resample $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ with the weights $\{\pi_t^{(i)}\}_{i=1}^N$
 [Step 3] draw $\alpha_{t+1}^{(i)} \sim q(\alpha_{t+1}|\alpha_t^{(i)}, y_{t+1})$, $i = 1, \dots, N$
 [Step 4] compute the unnormalized weights

$$\tilde{w}_{t+1}^{(i)} = \frac{p(y_{t+1}|\alpha_{t+1}^{(i)})p(\alpha_{t+1}^{(i)}|\alpha_t^{(i)})}{q(y_{t+1}|\alpha_t^{(i)})q(\alpha_{t+1}^{(i)}|\alpha_t^{(i)}, y_{t+1})}$$
 and normalize the weights

$$w_{t+1}^{(i)} = \tilde{w}_{t+1}^{(i)} / \sum_{j=1}^N \tilde{w}_{t+1}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, N$$

 [Step 5] output $\{\alpha_{t+1}^{(i)}, w_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^N$

D. 두꺼운 꼬리를 가지는 확률변동성모형의 사후표본추출

다음과 같은 알고리즘으로 $\{v, \{\lambda_t\}_{t=1}^T\}$ 의 사후표본을 추출할 수 있다.

$$\blacksquare \quad \pi(v|\{\lambda_t\}_{t=1}^T) \propto p(\{\lambda_t\}_{t=1}^T|v)\pi(v)$$

v 의 로그사후확률밀도함수의 최빈값 $\hat{v}$ 에서 라플라스근사를 이용하는 IMH 알고리즘(independent Metropolis-Hastings algorithm)으로 v 의 사후표본을 생성할 수 있다. 후보생성확률밀도함수와 MH채택확률은 다음과 같다.

$$q(v) = TN_{(2,\infty)}(\hat{v}, V(\hat{v})) \quad , \quad V(\hat{v}) = - \frac{\partial^2 \ln \pi(v|\{\lambda_t\}_{t=1}^T)}{\partial^2 v^2} \Big|_{v=\hat{v}} \quad (D.1)$$

$$\alpha_{MH}(v, v^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(v^*, \{\lambda_t\}_{t=1}^T)q(v)}{\pi(v, \{\lambda_t\}_{t=1}^T)q(v^*)} \right\}$$

$$\blacksquare \quad \pi(\lambda_t | \mathbf{v}) \propto p(r_t, v_{t+1} | v_t, \lambda_t) \pi(\lambda_t | \mathbf{v})$$

$u_t = (r_t - \mu^s) / \sqrt{v_t}$ 라 하면, $t = 1, \dots, T-1$ 기의 u_t 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_t = \sqrt{\lambda_t} \rho \eta_t + \sqrt{\lambda_t} \sqrt{(1 - \rho^2)} e_t, \quad e_t \sim i.i.d. N(0, 1), \quad t = 1, \dots, T-1 \quad (\text{D.2})$$

이를 이용하면 λ_t 의 사후조건부확률밀도함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_t | u_t, \eta_t, \mathbf{v}) &\propto \lambda_t^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(u_t - \sqrt{\lambda_t} \rho \eta_t)^2}{2(1 - \rho^2) \lambda_t} \right\} \pi(\lambda_t | \mathbf{v}) \quad (\text{D.3}) \\ &\propto \left[\lambda_t^{-1/2} \exp \left\{ -\left(\frac{u_t^2 / (1 - \rho^2)}{2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_t} \right) \right\} \pi(\lambda_t | \mathbf{v}) \right] \exp \left\{ \frac{\rho u_t \eta_t}{1 - \rho^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} \right) \right\} \\ &\quad \text{for } t = 1, \dots, T-1 \end{aligned}$$

식 (D.3)의 사후조건부확률밀도함수에서 $[\cdot]$ 부분은 역감마분포의 확률커널이므로 이를 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH알고리즘으로 λ_t 의 사후표본을 생성할 수 있다. 후보생성확률밀도함수 $q(\lambda_t)$ 와 MH채택확률 $\alpha(\lambda_t, \lambda_t^*)$ 는 다음과 같다.

$$\lambda_t^* \sim IG \left(\frac{\mathbf{v} + 1}{2}, \frac{\mathbf{v} + (u_t / \sqrt{1 - \rho^2})^2}{2} \right) \quad (\text{D.4})$$

$$\alpha_{MH}(\lambda_t, \lambda_t^*) = \min \left\{ 1, \exp \left[\frac{\rho u_t \eta_t}{1 - \rho^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_t^*}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} \right) \right] \right\} \quad (\text{D.5})$$

그리고 T 기의 λ_T 의 사후확률밀도함수는 다음과 같은 역감마분포이므로 이로

부터 직접 λ_T 의 사후표본을 생성할 수 있다.

$$\lambda_T \sim IG((nu+1)/2, (v+u_T^2)/2)$$

References

- Aït-Sahalia, Y. (2002), "Maximum-Likelihood Estimation of Discretely-Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach," *Econometrica* 70, 223-262.
- Aït-Sahalia, Y. (2008), "Closed-form likelihood expansions for multivariate diffusions," *Annals of Statistics* 36, 906-937.
- Aït-Sahalia, Y. and R. Kimmel (2007), "Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models," *Journal of Financial Economics* 83, 413-452.
- Andersen, T.G. and J. Lund (1997), "Estimating Continuous-Time Stochastic Volatility Models of the Short-term Interest Rate," *Journal of Econometrics* 7, 343-377.
- Andersen, T., L. Benzoni, and J. Lund (2002), "Towards an empirical foundation for continuous-time equity return models," *Journal of Finance* 57, 1239-1284.
- Andrews, D.W.K. (1991), "Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation," *Econometrica* 59, 817-858.
- Andrews, D.W.K and J.C. Monahan (1992). "An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimator," *Econometrica* 60, 953-966.
- Bai, J. (2003), "Testing parametric conditional distributions of dynamic models". *Review of Economics and Statistics*, 85, 531-549.

Bailey, W. and R.M. Stulz (1989), "The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24(1), 1-12.

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen (1997), "Empirical performance of alternative option pricing models," *Journal of Finance* 52, 2003-2049.

Barndorff-Nielsen, O. E. and O. Halgreen (1977), "Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse gaussian distribution," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 38(4), 309-311.

Bates, D. (2000), "Post-'87 crash fears in S&P 500 futures options," *Journal of Econometrics* 94, 181-238.

Bates, D. (2006), "Maximum Likelihood Estimation of Latent Affine Processes", *Review of Financial Studies* 19(3), 909-965.

Bauwens, L. and M. Lubrano (1998), "Bayesian inference on GARCH models using Gibbs sampler," *Econometrics Journal* 1, C23-C46.

Berkowitz, J. (2001), "Testing Density Forecasts, With Applications to Risk Management," *Journal of Business and Economic Statistics* 19, 465-474.

Beskos, A. O. Papaspilopoulos, G. Roberts and P. Fearnhead (2006), "Exact and computationally efficient likelihood-based estimation for discretely observed diffusion processes," *Journal of Royal Statistical Society Series B* 68, 333-382.

- Bibby B, M. Jacobsen and M. Sorensen (2009), "Estimating functions for discretely sampled diffusion type models," Handbook of financial econometrics, (eds.) Y. Aït-Sahalia and L. Hansen, North-Holland, Amsterdam, 203-268.
- Bontemps, C. and N. Meddahi (2005), "Testing normality: A GMM approach," Journal of Econometrics 124, 149-186.
- Broadie, M., M. Chernov and M. Johannes (2007), "Model Specification and Risk Premium:: Evidence from Futures Options," Journal of Finance 62(3), 1453-1490.
- Broto, C. and E. Ruiz (2004), "Estimation Methods For Stochastic Volatility Models: A Survey," Journal of Economic Survey 18, 613-649.
- Carpenter, J., P. Clifford, and P. Fearnhead (1999), "An improved particle filter for non-linear problems," IEEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation 146, 2-7.
- Chacko, G., and L. M. Viceira (2003), "Spectral GMM Estimation of Continuous-time Processes," Journal of Econometrics 116, 259-292.
- Chen, Y-T. (2011), "Moment Tests for Density Forecast Evaluation in the Presence of Parameter Estimation Uncertainty," Journal of Forecasting 30, 409-450.
- Chernov, M. and E. Ghysels (2000), "A study towards a unified approach to the joint estimation of objective and risk-neutral measures for the purpose of options valuation," Journal of Financial Economics 56, 407-458.

Chernov, M., A.R. Gallant, E. Ghysels, and G. Tauchen (2003), "Alternative models for stock price dynamics," *Journal of Econometrics* 116, 225-257.

Chib, S. and E. Greenberg (1995), "Understanding the Metropolis-Hasting Algorithm," *American Statistician* 49(4), 327-335.

Chib, S., F. Nardari and N. Shephard (2002), "Markov Chain Monte Carlo Methods for Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics* 108, 281-316.

Chib, S., F. Nardari and N. Shephard (2006), "Analysis of High Dimensional Multivariate Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics* 134, 341-371.

Christoffersen, P., K. Jacobs, and K. Mimouni (2010), "Models for S&P 500 Dynamics: Evidence from Realized Volatility, Daily Returns, and Option Prices," *Review of Financial Studies* 23, 2139-2183.

Corradi V and N.R. Swanson (2006), "Predictive density evaluation," In *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 1, Elliott G., C.W.J. Granger and A. Timmermann (eds). Elsevier, Amsterdam, 197-280.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica* 53(2), 385-407.

Creal, D. (2012), "A Survey of Sequential Monte Carlo Methods For Economics and Fiance," *Econometric Reviews* 31(3), 245-296.

- Devroye, L. (2014), "Random variate generation for the generalized inverse Gaussian distribution," *Statistics and Computing* 24, 239-246.
- Diebold F.X., T.A. Gunther and A.S. Tay (1998), "Evaluating density forecasts with applications to financial risk management," *International Economic Review* 39, 863-883.
- Doucet, A., J.F.G. de Freitas, and N.J. Gordon (eds.), (2001), *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag, New York.
- Doucet, A. and A.M. Johansen (2011), "A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years later," *Handbook of Nonlinear Filtering*, (eds.) Crisan, D. and B. Rozovsky, Oxford University Press, 656-704.
- Duan, J.C. (2003). "A specification test for time series models by a normality transformation". Working Paper, University of Toronto.
- Duffie, D. J. Pan and K. Singleton (2000), "Transform Analysis and Asset Pricing For Affine Jump-Diffusions", *Econometrica* 68(6), 1343-1376.
- Durham G, and A. Gallant (2002), "Numerical techniques for maximum likelihood estimation of continuous-time diffusion processes (with comments)," *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 297-316.
- Elerian O, Chib S, Shephard N (2001), "Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions," *Econometrica* 69, 959-993.
- Eraker, B. (2001), "MCMC analysis of diffusion models with application to finance," *Journal of Business and Economic Statistics* 19, 177-191.

Eraker, B. M. Johannes and N. Polson (2003), "The Impact of Jumps in Volatility and Returns," *Journal of Finance* 58(3), 1269-1300.

Eraker, B. (2004), "Do Stock Prices and Volatility Jumps? Reconciling Evidence from Spot and Option Prices," *Journal of Finance* 59(3), 1367-1403.

Ferriani, F. and S. Pastorello (2012), "Estimating and testing non-affine pricing models with a large unbalanced panel of options," *Econometrics Journal* 15, 171-205.

Fiorentini, G., E. Sentana, and G. Cazolari (2004), "On the validity of the Jarque-Bera normality test in conditional heteroscedastic dynamic regression models," *Economics Letters* 83(3), 307-312

Frühwirth-Schnatter (1996), "Recursive Residuals and Model Diagnostics for Normal and Non-normal State Space Models," *Environmental and Ecological Statistics* 3(4), 291-309.

Gallant, A. and G. Tauchen (1996), "Which moments to match?" *Econometric Theory* 12, 657-681.

Gerlach, R., C. Carter and R. Kohn (1999), "Diagnostics For Time Series Analysis," *Journal of Time Series Analysis* 20(3), 309-330.

Geweke, J. (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," in J.O. Berger, J.M. Bernardo, A.P. Dawid, and A.F.M. Smith eds., *Bayesian Statistics 4*, 169-194. Oxford, Oxford Univ. Press.

- Geweke, J. and G. Amisano (2010), "Comparing and Evaluating Bayesian predictive distributions of asset returns," *International Journal of Forecasting* 26, 216-230.
- Ghysels, E., A. Harvey and E. Renault (1996) Stochastic volatility. *Handbook of Statistics Vol 14, Statistical Methods in Finance.* (eds.) G.S. Maddala and C.R. Rao, Amsterdam:Elsevier, 119-191.
- Gilks, W., N. Best, and K. Tan (1994), "Adaptive rejection Metropolis sampling with Gibbs sampling," *Applied Statistics Series C* 44, 455-472.
- Gulisashvili, A. (2012), *Analytically Tractable Stochastic Stock Price Models*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Hentschel, L. (1995), "All in the family: nesting symmetric and asymmetric GARCH models," *Journal of Financial Economics* 39, 71-104.
- Hong, Y. H. Li and F. Zhao (2004), "Out-of-Sample Performance of Discrete-Time Spot Interest Rate Models," *Journal of Business and Economic Statistics* 22(4), 457-473.
- Hong, Y. and H. Li (2005), "Nonparametric Specification Testing for Continuous-Time Models with Applications to Term Structure of Interest Rates", *Review of Financial Studies* 18(1), 37-84.
- Ignatieva, K. P. Rodrigues and N. Seeger (2015), "Empirical Analysis of Affine Versus Nonaffine Variance Specifications in Jump-Diffusion Models for Equity Indices," *Journal of Business and Economic Statistics* 33, 68-75.

Jacquier, E., N.G. Polson and P.E. Rossi (2004), "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models with Leverage Effect and Fat tails," *Journal of Econometrics* 122, 185-212.

Jeanblanc, M., M. Yor and M. Chesney (2009), *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer-Verlag, London.

Jiang, G. J., and J. L. Knight (2002), "Estimation of Continuous Time Processes Via the Empirical Characteristic Function," *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 198-212.

Johannes, M.S., N.G. Polson, and J.R. Stroud (2009), "Optimal Filtering of Jump Diffusions: Extracting Latent States from Asset Prices," *Review of Financial Studies* 22, 2759-2799.

Jørgensen, B. (1982). *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Lecture Notes in Statistics 9. Springer-Verlag, New York.

Jones, C. (2003), "The dynamics of stochastic volatility: evidence from underlying and options markets," *Journal of Econometrics* 116, 181-224.

Kantas, N., A. Doucet, S.S. Singh, J. Maciejowski and N. Chopin (2015), "On Particle Methods for Parameter Estimation in State-Space Models," *Statistical Science* 30(3), 328-351.

Kass, R.E. and A. Raftery (1995), "Bayes factors," *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773-795.

- Kim, S., N. Shephard, and Chib, S. (1998), "Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models," *Review of Economic Studies* 45, 361-393.
- Li, H., M.T. Wells and C.L. Yu (2008), "A Bayesian Analysis of Return Dynamics with Lévy Jumps," *Review of Financial Studies* 21, 2345-2378.
- Li, W.K. (2004) , *Diagnostic Checks in Time Series*, Chapman & Hall/CRC.
- Malik, S. and M.K. Pitt (2011), "Particle filters for continuous likelihood and maximization," *Journal of Econometrics* 165, 190-209.
- Newey W.K. (1985), "Maximum likelihood specification testing and conditional moment tests," *Econometrica* 53, 1047-1070.
- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard and J. Nakajima (2007), "Stochastic Volatility with Leverage: Fast and Efficient Likelihood Inference," *Journal of Econometrics* 140, 425-449.
- Pan, J., (2002), "The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study," *Journal of Financial Economics* 63, 3-50.
- Paolella, M. (2007), *Intermediate probability: A computational approach*. Wiley, Chichester.
- Pitt, M.K., and N. Shephard, (1999), "Filtering via simulation: auxiliary particle filters," *Journal of the American Statistical Association* 94, 590-599.
- _____ (2001), "Auxiliary variable based particle filters," *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Doucet, A.,

J.F.G. de Freitas, and N.J. Gordon, Springer-Verlag, New York. 271-293.

Richardson, M. and T. Smith, (1993), "A test for multivariate normality in stock returns," *Journal of Business* 66, 295-321.

Roberts, G.O. and O. Stramer (2001), "On inference for partially observed nonlinear diffusion models using the Metropolis-Hastings algorithm," *Biometrika* 88, 603-621.

Rosenblatt M. (1952), "Remarks on a multivariate transformation," *Annals of Mathematical Statistics* 23, 470-472.

Sentana, E. (1995), "Quadratic ARCH models," *Review of Economic Studies*, 62, 639-661.

Shephard, N. and M.K. Pitt (1997), "Likelihood analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika* 84, 653-667.

Singleton, K. J. (2001), "Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the Empirical Characteristic Function," *Journal of Econometrics* 102, 111-141.

Smith, J.Q. (1985), "Diagnostic Checks of Non-standard Time Series Models," *Journal of Forecasting* 4, 283-291

Sørensen, M. (2012), "Estimating functions for diffusion type processes", Kessler, M., A. Lindner and M. Sorensen (eds.), *Statistical Methods for Stochastic Differential Equations*, CRC Press, 1-107.

- Spreij, P., E. Veerman and P. Vlaar (2011), "An Affine Two-Factor Heteroskedastic Macro-Finance Term Structure Model," *Applied Mathematical Finance* 18(4), 331-352.
- Tauchén G. (1985), "Diagnostic testing and evaluation of maximum likelihood models," *Journal of Econometrics* 30, 415-443.
- Tierney, L. (1994), "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions" (with discussion), *Annals of Statistics* 22, 1701-1762.
- Watanabe, T. (2000), "Bayesian Analysis of Dynamic Bivariate Mixture Models: Can They Explain the behavior of returns and Trading Volume?" *Journal of Business and Economic Statistics* 18(2), 199-210.
- West K.D. (1996), "Asymptotic inference about predictive ability," *Econometrica* 64, 1067-1087.
- West, K.D. and M.W. McCracken, (1998), "Regression based tests of predictive ability," *International Economic Review* 39, 817-840.