計量經濟學報, 제16권 제4호(2005. 12. 31.), 57-79

경제학적 지수이론에 의한 'superlative' 지수의 재해석

최 기 홍*

Diewert(1976)는 어떤 지수산식의 일치하는 함수(단위비용함수 또는 집계함수)가 신축적(flexible)인 경우 superlative지수로 정의하였다. 그러나 이런 기존 정의는 일치하는 함수의 규명이 어려운 경우가 많아 적용상의 문제점이 있다. 본고는 superlative지수를 '임의의 경제학적 지수를 이차근사(second order approximation)할 수 있는 지수'로 새롭게 정의할 것을 제안하고 있다. 이러한 제안은 기존 정의와 새로운 정의는 실질적으로 동등하며 신축적 함수의 규명보다 직접 임의의 경제학적 지수산식에 대한 이차근사를 보이는 것이 용이하다는 사실에 기초한다. 본고는 새로운 정의의 유용성을 보이기 위하여 기존 정의에서 유일한 superlative지수족 r계이차평균지수가 새로운 정의에서도 역시 superlative지수인 것을 보이고 있다. 또한 지수이론에서 실증적, 이론적으로 중요한 지수이지만 일치하는 함수가 규명되지 않아 기존 정의에서는 superlative지수가 아닌 Sato-Vartia지수가 새로운 정의에서는 superlative지수임을 보이고 있다.

핵심용어 : 경제학적지수, 이차근사, Superlative Index, r계평균지수, Sato-Vartia지수

JEL Classifications : C43

Ⅰ. 서 론

경제분석에 사용되는 가격 및 수량의 거시데이터는 지수(index number)의 개념에 논리적 기반을 두고 있다. 이러한 거시데이터에는 물가지수, 산업생산지수,

* 국민연금연구원, 서울시 강남구 논현동 4-15 국민연금강남회관, Tel: 02-3218-8631, Fax: 02-541-2901, E-mail: khchoi@npc.or.kr

투고일: 2005. 3. 26 심사일: 2005. 3. 26 최종심사완료일: 2005. 11. 2

GDP 등 핵심적 경제변수들이 망라된다. 19세기 후반에 고안된 라스파이레스지수, 파쉐지수가 아직도 국가통계기관에서 기본적인 지수산식으로 사용되고 있으나 그 동안 꾸준한 이론적 발전이 지속되고 있다. Diewert(1993, pp.4-5)에 따르면 지수이론은 공리적(axiomatic) 접근법과 경제학적 접근법의 양대 조류가 있으나 두 가지 접근법의 결론은 거의 같다고 한다. 본고는 경제학적 접근법에 한정하고 가격지수 또는 물가지수에 한정하기로 한다. 하지만 본고의 내용은 쌍대(duality) 이론에 의하여 수량지수에 대해서도 대칭적으로 성립한다.

1. 경제학적 지수이론과 superlative지수의 새로운 정의

경제학적 지수이론은 공리적 접근법의 지수이론과 달리 다음 두 가지 가정에 기초한다. 첫째, 관찰되는 가격 $p^t \equiv (p_{1,t}, \cdots, p_{n,t})$, 수량 $x^t \equiv (x_{1,t}, \cdots, x_{n,t})$ 데이터는 소비자 또는 생산자의 최적화된 균형 값이다[1]. 둘째, 수량 데이터를 요약할 수 있는 동조적(homothetic) 집계함수[2] $f(x^t)$의 존재이다. 따라서 dual 관계의 단위비용(unit cost) 함수 $c(p^t)$가 존재한다. 경제학적 지수이론에서 가격지수는 식 (1)과 같이 단위비용의 비율로 정의된다.

$$P^E \equiv \frac{c(p^1)}{c(p^0)} \tag{1}$$

경제학적 지수이론은 ‘exactness(일치)’와 ‘superlative(최상)’의 개념을 중심으로 한다. 일치성의 개념은 Diewert(1976)에 의하면 러시아어로 작성된 Konüs and Byushgens(1926)에 의한다고 한다. 단위비용함수 $c(p)$와 어떤 특정한 지수산식 P가 식 (1)의 관계를 만족할 때 지수산식 P는 $c(p)$에 일치한다고 한다. Konüs and Byushgens는 라스파이레스, 파쉐지수가 레온티에프 단위비용함수에 일치하며, Fisher지수는 쿼드래틱 단위비용함수에 일치함을 보였다. 또한 Diewert (1976)는 Törnqvist 지수가 당시 발견된 신축적(flexible) translog 집계함수와 일치함을 보여서 일치성의 개념이 주목받게 되었다.

한편, 최상성(이하 superlative)의 개념은 Diewert(1976, p.117)에 의한다. Diewert는 우수한 지수산식은 일치하는 집계함수 또는 단위비용함수가 신축적(flexible)이라는 사실에 주목하여 ‘superlative’ 지수의 개념을 정의하였다. 함수

---

1) 벡터의 상첨차 t는 시점($t=0$: 기준시점, $t=1$: 비교시점)을 나타낸다.
2) Diewert는 생산자의 맥락에서는 생산함수, 소비자의 맥락에서는 효용함수를 동시에 지칭하기 위하여 집계함수(aggregator function)라는 용어를 사용한다.

형태의 신축성은 임의의 함수 $c(p)$를 이차미분근사[3]할 수 있다는 것을 의미한다. 또한 Diewert(1976)는 Fisher, Törnqvist지수 등을 특수한 경우로 하는 r계이차평균지수(quadratic mean of order r)가 superlative 한 것을 보였다. Diewert에 의한 superlative지수의 개념은 지수이론을 1970년대에 크게 발전한 생산함수이론에 연결지워서 경제학적 지수이론의 발전에 크게 기여한 것으로 평가된다.[4] 참고로 처음으로 superlative라는 용어를 사용한 Fisher는 본인이 이상지수라고 생각한 지수산식(Fisher 이상지수)에 실증적으로 가까운 값을 갖는 지수산식들을 superlative하다고 이름하였다.[5]

그러나 Diewert의 superlative지수의 정의는 입증이 매우 어려운 일대일 대응관계의 일치성 개념에 기초하였기 때문에 적용상에는 어려움이 있다. 우선 Diewert 자신이 지적하였듯이 반드시 일치성은 일대일 대응관계는 아니라는 개념상의 문제점이 있다.[6] 이러한 어려움은 1976년 Diewert의 일반화된 r계이차평균지수 이후 새로운 superlative지수는 하나도 추가된 것이 없다는 사실에서도 짐작될 수 있다.

이러한 문제점이 가장 명확하게 드러나는 것이 Sato(1976), Vartia(1976)가 독립적이지만 거의 동시에 발표한 Sato-Vartia지수의 경우이다. Sato(1976), Lau (1979)는 Sato-Vartia지수가 CES함수에 일치함을 보였으나 그들의 증명은 CES 단위비용함수의 비율이 Sato-Vartia지수라는 충분성(sufficiency, if)에 대한 증명이며, Sato-Vartia지수이면 반드시 CES단위비용함수라는 필요성(necessity, only if)에 대한 증명은 아닌 것이다. 따라서 Sato-Vartia지수가 신축적이지 못한 CES 함수에 일치한다고는 하지만 어떤 미지의 신축적 함수에 일치할 가능성이 남아있기 때문에 superlative하지 못한 것으로 단정할 수는 없다. 이러한 문제점 때문에 Sato-Vartia지수는 Balk(1995), Reinsdorf and Dorfman(1999) 등과 같이 연구

---

3) 함수 f와 함수 f^*가 $f(x^0)=f^*(x^0)$, $\nabla f(x^0)=\nabla f^*(x^0)$, $\nabla^2 f(x^0)=\nabla^2 f^*(x^0)$의 관계를 갖을 때 둘은 이차미분근사(second order differential approximation) 관계라고 정의한다.

4) "...Thirty-five years after that analysis appeard there has been but one major advance in index number theory - namely W. E. Diewert's formalizing concept of "superlative index numbers," which is a formula..."(Samuelson, 1983, Introduction to the enlarged edition).

5) Fisher(1922, p.243) "Numerically, table 28 gives all the 134 index numbers in the order of remoteness from 353(Fisher index) ⋯, beginning with the remotest and ending with 353 itself".

6) The above theorem show that more than one index number formula can be exact for the same aggregator function, and one index number formula can be exact for quite different aggregator function(Diewert, 1981, p.183).

자들에 의해 유일하게 Fisher지수에 필적하는 것으로 높이 평가되는 지수산식임에도 불구하고 기존 superlative지수의 정의에 따르면 판정이 유보되는 상태이다.

이러한 기존 정의의 한계점을 인식하여 본고는 어떤 지수산식이 임의의 경제학적지수를 이차근사(second order approximation)할 수 있는 경우 superlative지수로 정의할 것을 제안한다. 기존의 일치성 개념에 기초한 정의는 식 (1)과 같이 정의되는 경제학적지수의 단위비용함수에 초점을 둔 것이다. 임의의 단위비용함수를 이차미분근사할 수 있는 신축적 단위비용함수의 비율은 그렇지 못한 단위비용함수에 비해 경제학적지수 P^E와 더 적은 오차를 갖을 것이기 때문이다.[7] 즉, 기존 정의에서 superlative지수들은 모두 새로운 정의에서도 superlative지수인 것이다.

기존 정의와 새로운 정의의 관계는 기존 정의가 새로운 정의에 대해 충분조건이 되며 새로운 정의는 기존 정의의 조건중에서 신축적 함수의 규명을 생략한 것이다. 그러나 기존 정의가 요구하는 일치하는 신축적 함수의 규명은 지수이론에서 실질적 가치가 없다고 생각한다. 즉, 새로운 정의는 기존 정의와 바람직한 지수산식에 대한 기준으로는 실질적으로 동등한 것으로 판단된다.

2. 원고의 구성

다음 Ⅱ절에서는 경제학적지수와 디비지아적분지수는 동등하다는 경제학적지수의 기본정리(Barnett *et al.*, 2003)를 소개하고 Taylor 정리에 의한 Törnqvist지수와 경제학적지수간의 기본적 근사정리를 소개하고 있다. 이러한 Theil(1975) 등에 있는 증명은 일치하는 함수의 규명을 필요로 하지 않는 superlative지수에 대한 새로운 정의의 가능성을 보여주는 것이다. 다음 Ⅲ절은 경제학적 지수이론의 일반적 가정에서 r계이차평균지수가 새로운 정의를 만족하므로 역시 superlative 지수임을 보였다. 다음 Ⅳ절에서는 Theil(1973, 1974)과 Sato(1974, 1976)에서 검토되었던 지수산식들을 일반화한 정규화대칭평균가중치(normalized symmetric mean weight) 디비지아지수를 Theil-Sato지수로 정의하고 동지수가 임의의 경제학적지수에 대한 이차근사식임을 보이고 있다. Sato-Vartia지수는 Theil-Sato 지수족의 일원이므로 따름정리로서 임의의 경제학적지수에 대한 이차근사식임을

---

7) Diewert(1981, p.185)는 다음과 같이 쓰고 있다. “Thus if the true aggregator function can be approximated closely by a homogeneous quadratic, and the producer or consumer is engaging in competitive maximizing behaviour during the two periods, then the Fisher price and quantity indexes will closely approximate the true ratios of unit *cost* and output(or utility)[이탤릭 cost는 누락된 것으로 추측하여 필자가 추가한 것이다].

알 수 있다. 이는 일치하는 함수는 미상이지만 새로운 정의에서 Sato-Vartia지수가 superlative지수임을 의미한다. 마지막 Ⅴ절은 요약 및 결론이다.

Ⅱ. 경제학적지수의 근사정리

앞서 식 (1)과 같이 단위비용함수의 비율로 정의된 경제학적지수 P^E는 디비지아적분지수와 밀접한 관계를 갖는다. Divisia(1925)는 경제이론 없이 가격과 수량을 시간의 연속함수로 가정한 다음 지출의 항등식에 미적분을 기계적으로 적용하여 식 (2)와 같은 디비지아적분지수를 도출하고 있다.[8)]

$$P^D \equiv \exp\left(\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} w_i d \ln p_i \right) \tag{2}$$

디비지아적분지수의 경제이론과의 관련성은 이후 Ville(1946), Hulten(1973), Samuelson and Swamy(1974), Barnett and Serletis(2000) 등에 기술되고 있다. 디비지아적분지수의 의의는 다음 기본정리와 같다.

경제학적지수의 기본정리

동조적(homothetic) 집계함수와 경제학적 최적화 즉, Shephard 렘마 $\partial c(p)/\partial p_i = x_i$의 가정하에 가격에 대한 디비지아적분지수는 경제학적지수, 즉, 단위비용함수의 비율에 유일하게 일치한다.

$$P^D \equiv P^E \tag{3}$$

식 (3)과 같은 사실에 비추어 최기홍(2001, p.85, p.88), Barnett *et al.*(2003, pp.59-60)은 디비지아적분지수를 경제지수의 원형(prototype economic index number)이라고 하였다. 따라서 경제학적 지수이론에서 식 (1)로 정의되는 경제학적지수와 디비지아적분지수는 동등하므로 앞서 superlative지수의 새로운 정의는

8) 본고는 디비지아적분지수와 디비지아지수를 구분하기로 한다. 디비지아지수는 연속함수 디비지아적분지수에 대한 이산근사식을 지칭하며 구체적으로는 소위 'log-change'지수를 의미한다.

디비지아적분지수를 이차근사하는 지수산식으로 재 정의하는 것도 가능하다.

디비지아적분지수의 근사식이 적분의 평균치정리[9]에 의하면 log-change 지수가 된다는 것은 잘 알려진 사실이다. Diewert(1995)는 가중치함수의 구체적 함수 형태에 대한 단서를 찾을 수 없는 것을 Divisia 지수이론의 한계점으로 지적하기도 하였으나, 사실 동조적집계함수와 dual 관계의 선형동차 단위비용함수와 Shephard 렘마 $\partial c(p)/\partial p_i = x_i$의 다른 형태인 $\partial \ln c(p)/\partial \ln p_i = w_i$를 활용할 경우 Taylor 근사식에 의하여 디비지아적분지수의 근사식 log-change지수의 가중치함수의 특정한 형태뿐만 아니라 오차의 정도까지 알 수 있다.

다음의 예들은 log-change지수의 대표적 형태인 기하평균지수, Törnqvist지수는 각각 디비지아적분지수에 대한 일차 및 이차 근사식이며, 특히 Törnqvist지수는 Taylor 근사식의 변형에 해당하는 이차근사렘마(quadratic approximation lemma)를 적용하면 쉽게 유도됨을 보이고 있다. 먼저, $f(x)$를 n변수 벡터 x의 함수로 하면 다음과 같은 Taylor 일차근사식으로 나타낼 수 있다.

$$f(x+h)-f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+h)}{\partial x_i} h_i + O_2 \tag{4}$$

위의 식에서 O_2는 오차항으로 h_i에 대한 2차 이상의 항들이다. $f(x) = \ln c(p)$, $x = \ln p$로 놓고 $\ln p^0$에서 Taylor 전개하면 다음 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln c(p^1) - \ln c(p^0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln c(p^0)}{\partial \ln p_i} (\ln p_{i,1} - \ln p_{i,0}) + O_2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_{i,0} (\ln p_{i,1} - \ln p_{i,0}) + O_2 \end{aligned} \tag{5}$$

위의 식에서 O_2는 오차항으로 $\ln p_{i,1} - \ln p_{i,0}$에 대한 2차 이상의 항들을 나타낸다. 즉, 식 (5)는 기준연도 가중(w^0) 기하평균지수는 경제학적지수를 일차근사한다는 것을 나타낸다. 같은 방법으로 $\ln p^1$에서 Taylor전개한 비교연도 가중(w^1) 기하평균지수는 경제학적지수를 일차근사한다.

한편, Theil이 많이 활용하였던 이차근사렘마에 의하면 일계 편도함수들만으로 이차 Taylor 다항식에 의해서만 가능하다고 생각하기 쉬운 이차근사식이 식 (6)과 같이 가능해진다.

---

9) Fuchs, Watson(1978, pp.161-162).

이차근사렘마(Theil ; 1975, pp. 37-38)

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(x+h)}{\partial x_i}+\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)h_i+O_3 \tag{6}$$

$f(x)=\ln c(p)$, $x=\ln p$로 놓고 위의 이차근사렘마를 적용하면 다음 식 (7)과 같은 식이 도출될 수 있다.

$$\begin{aligned}\ln c(p^1)-\ln c(p^0) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln c(p^0)}{\partial \ln p_i}+\frac{\partial \ln c(p^1)}{\partial \ln p_i}\right)(\ln p_{i,1}-\ln p_{i,0})+O_3 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{w_{i,0}+w_{i,1}}{2}(\ln p_{i,1}-\ln p_{i,0})+O_3 \\ &= \ln P^T+O_3\end{aligned} \tag{7}$$

위의 식에서 O_3는 오차항으로 $\ln p_{i,1}-\ln p_{i,0}$에 대한 3차 이상의 항들이다. 식 (7)의 좌변은 기본정리에서 경제학적지수 또는 디비지아적분지수의 대수값 $\ln P^E$이며 우변은 Törnqvist지수의 대수값 $\ln P^T$임을 알 수 있다. 즉, Törnqvist지수 P^T는 임의의 경제학적지수를 이차근사한다는 것을 의미한다. Törnqvist지수는 경제학적지수에 대한 이차근사식의 대표적 형태이며, 따라서 어떤 지수가 Törnqvist지수와 이차근사관계임이 밝혀지면 근사관계의 이전성(transivity)에 의하여 그 지수는 경제학적지수 또는 디비지아적분지수와 이차근사 관계라고 할 수 있다.

다음 Ⅲ절과 Ⅳ절에서는 Diewert의 r계이차평균지수족(index number family)과 본고에서 새롭게 정의된 Theil-Sato지수족이 각각 새로운 정의에서 역시 superlative지수인지를 보고자 한다. 흥미로운 사실은 Törnqvist지수는 r계이차평균지수족과 Theil-Sato지수족에 동시에 속한다는 것이다.

Ⅲ. r계이차평균지수의 근사정리

Denny(1974)는 r계이차평균(quadratic mean of order r) 단위비용함수 식 (8)을 정의하였으며, Diewert(1976)는 그것이 신축적(flexible)임을 증명하였다. 즉, 식 (8)은 임의의 단위비용함수를 이차미분근사(second order differential approximation)할 수 있는 모수적(parametric) 함수형태인 것이다.

$$c_r(p)=\left(\sum_i\sum_j a_{ij}p_i^{r/2}p_j^{r/2}\right)^{1/r},\ r\neq 0 \tag{8}$$

Diewert(1976)는 식 (9)와 같은 계수 r에 의한 지수족(index number family)을 정의하고 'r계이차평균지수'라 하였다. 또한 Diewert는 그것이 신축적인 함수식 (8)에 유일하게 일치함을 증명하였다. 따라서 r계이차평균지수는 Diewert의 정의에서 superlative한 것이다. 따라서 이 지수족의 대표적 구성 멤버들인 Törnqvist ($r\to 0$), Fisher($r=2$) 지수들은 따름정리로서 모두 superlative지수인 것이다.

$$P_r=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i,0}(p_{i,1}/p_{i,0})^{r/2}}{\sum_{i=1}^{n} w_{i,1}(p_{i,1}/p_{i,0})^{-r/2}}\right]^{\frac{1}{r}},\ r\neq 0 \tag{9}$$

Törnqvist(1936)[10]는 r계이차평균지수의 기본이 되는 r계평균(mean of order r)지수를 식 (10)과 같이 정의한바 있다. 식 (10)은 r과 t 두개의 파라메터로 규정되는 지수족이다.

$$P_{r,t}\equiv\left[\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^{r}\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{10}$$

Vartia(1978), Allen and Diewert(1981)에 의하면 r계평균지수족에는 라스파이레스지수($r=1,\ t=0$), 파쉐지수($r=-1,\ t=1$) 그리고 기하평균지수($r\to 0$) 등이 포함된다. 다음 <표 1>은 r계평균 지수족의 중요한 멤버들을 정리한 것이다.

〈표 1〉 r계평균 지수족의 예

지 수	계수(r)	가중시점(t)	산 식
Laspeyres	1	0	$P_{1,0}=\sum_{i=1}^{n} w_{i,0}\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}$
Paasche	-1	1	$P_{-1,1}=\left[\sum_{i=1}^{n} w_{i,1}\left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^{-1}\right]^{-1}$
Palgrave	1	1	$P_{1,1}=\sum_{i=1}^{n} w_{i,1}\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}$
Harmonic Laspeyres	-1	0	$P_{-1,0}=\left[\sum_{i=1}^{n} w_{i,0}\left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^{-1}\right]^{-1}$
Weighted Geometric	$r\to 0$	0, 1	$P_{0,t}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^{w_{i,t}}$

10) Vartia(1978)에 의하면 핀랜드어로 작성된 원고로 추정된다.

식 (9), 식 (10) 두 개의 식을 비교하면 r계이차평균지수는 식 (11)과 같이 두 개의 r계평균지수로 나타낼 수 있다.

$$P_r \equiv \sqrt{P_{r/2,0} P_{-r/2,1}} \tag{11}$$

식 (11)과 <표 1>에 의하면 Fisher지수는 r=2인 경우의 r계이차평균지수임을 알 수 있다. 즉, $P_2 = \sqrt{P_{1,0} P_{-1,1}} = \sqrt{P^{La} P^{Pa}} = P^F$이다. r계이차평균지수는 모든 $r \neq 0$에 대해 정의되는 지수족이며 따라서 무한히 많은 superlative 지수중에서 어떤 것을 선택할 것인가가 문제로 대두된다. Diewert (1978)는 r계이차평균지수가 Törnqvist지수에 이차미분근사(second order differential approximation)임을 보였고 따라서 근사정도의 관점에서 superlative 지수간에는 차이가 없다고 하였다.

그러나 Diewert의 증명(1978, p.888, 정리 5)은 두 시점의 가격과 수량 모두 변화가 없는 특수한 상황, $p^1 = p^0$, $x^1 = x^0$에 대한 것이어서 일반적인 증명과는 거리가 있다.[11] 그것은 Diewert가 P_r과 P_0의 근사정도를 파악하는데 이차미분근사의 개념을 사용한 것에서 비롯된다.[12] 이차미분근사는 ①$P_r = P_0$, ②$\nabla P_r = \nabla P_0$, ③$\nabla^2 P_r = \nabla^2 P_0$을 충족시키는 것이 증명되어야 하며 이중 ①$P_r = P_0$을 충족시키기 위해서는 $p^1 = p^0$, $x^1 = x^0$의 가정이 불가피하다. Barnett(1983)은 경제학에서 사용되는 이차*미분*근사와 수학일반에서 사용되는 이차근사는 수학적으로 동등한 것임을 보였다. 그러나 본고는 지수산식간의 근사정도를 이차미분근사 대신 통상적인 이차근사의 개념을 사용하였으며 따라서 Diewert(1978)와 같은 제약이 필요없다는 것에 주목이 필요하다.

다음은 경제학적 지수이론의 일반적 가정하에서 r계이차평균지수가 임의의 경제학적지수의 이차근사함수라는 사실을 증명하고자 한다. 증명에는 다음 두 가지 렘마(예비정리)가 필요하다.

---

11) Diewert는 그러한 특수한 가정이 연쇄지수를 사용하는 것으로 보완될 수 있음을 수치적으로 보이고 있다.

12) 앞에서 Törnqvist지수를 P^T로 나타내었다. 한편, Törnqvist지수가 r계이차평균지수의 관점에서는 $\lim_{r \to 0} P_r$이므로 $P_0 \equiv P^T$와 같이 두 가지 표기를 혼용하기로 한다.

가중치차이의 렘마

집계함수의 동조성(homotheticity)과 최적화의 가정하에 $w_{i,1}-w_{i,0}=O_1$, 이때 O_1은 $\ln p_{i,1}-\ln p_{i,0}$의 1차항이상의 항을 의미한다.

[증명]

$$\begin{aligned} w_{i,1}-w_{i,0} &= \frac{\partial \ln c(p^1)}{\partial \ln p_i} - \frac{\partial \ln c(p^0)}{\partial \ln p_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln c(p^0)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_k}(\ln p_{k,1} - \ln p_{k,0}) + O_2 \\ &= O_1 \end{aligned} \tag{12}$$

Törnqvist lemma(1936)[13)]:

$$\ln P_{r,t}-\ln P_{0,t}=\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} z_{i,t}^2 + O_3 = O_2 \tag{13}$$

위에서 $z_{i,t}\equiv \ln p_{i,1}/p_{i,0}-\sum_{k=1}^{n} w_{k,t}\ln p_{k,1}/p_{k,0}=O_1$이다.

식 (5)와 관련하여 설명되었듯이 Taylor 전개에 의하면 $P_{0,1}$, $P_{0,0}$ 즉, 비교년도가중 (w^1) 기하평균지수와 기준년도가중(w^0) 기하평균지수는 디비지아적분지수 또는 경제학적지수의 일차근사함수임을 알 수 있었다. 따라서 식 (13)의 Törnqvist lemma는 $P_{0,1}, P_{0,0}$와의 관계, 즉 근사관계의 이전성(transitivity)에 의해서 일반적으로 <표 1>에 나타나는 Lapeyres, Paasche 등을 포함한 모든 r계평균지수족은 모두 임의의 경제학적 지수에 일차근사 함수들임을 의미한다.

다음은 앞의 식 (12), 식 (13) 두 렘마를 활용하여 r계이차평균지수는 Törnqvist지수에 이차근사임을 증명하고 있다.

---

13) Vartia(1978)에 의하면 Törnqvist가 처음으로 식 (13)의 관계식을 도출하였다고 한다. 증명은 부록에 제시하였다.

r계이차평균지수의 근사정리 :

$$\ln P_r - \ln P_0 = O_3 \tag{14}$$

[증명]

식 (11)에 의하여 $\ln P_r \equiv \frac{\ln P_{r/2,0} + \ln P_{-r/2,1}}{2}$, $\ln P_0 \equiv \frac{\ln P_{0,0} + \ln P_{0,1}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\ln P_r - \ln P_0 &= \frac{1}{2}[(\ln P_{r/2,0} - \ln P_{0,0}) + (\ln P_{-r/2,1} - \ln P_{0,1})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{4}\sum_{i=1}^{n} w_{i,0} z_{i,0}^2 - \frac{r}{4}\sum_{i=1}^{n} w_{i,1} z_{i,1}^2\right) + O_3 \quad \because \text{Törnqvist lemma} \\
&= -\frac{r}{8}\sum_{i=1}^{n}(w_{i,1} z_{i,1}^2 - w_{i,0} z_{i,0}^2) + O_3 \\
&= -\frac{r}{8}\sum_{i=1}^{n}(w_{i,1} - w_{i,0}) z_i^2 + O_3 \\
&= -\frac{r}{8}\sum_{i=1}^{n} O_1 \times O_2 + O_3 = O_3
\end{aligned} \tag{15}$$

위에서 $z_i \equiv \ln p_{i,1}/p_{i,0} - \sum_{k=1}^{n} 1/2(w_{k,1} + w_{k,0}) \ln p_{k,1}/p_{k,0} = O_1$이며 가중치차이의 렘마에 의해서 $w_{i,1} - w_{i,0} = O_1$이다. 식 (15)에서 $\sum_{i=1}^{n}(w_{i,1} z_{i,1}^2 - w_{i,0} z_{i,0}^2) = \sum_{i=1}^{n}(w_{i,1} - w_{i,0}) z_i^2$는 다소 복잡하여 부록에 증명을 수록하였다.

Törnqvist지수는 임의의 경제학적지수에 이차근사이므로 근사관계의 이전성과 위의 정리에 의하면 r계이차평균지수는 임의의 경제학적 지수에 이차근사식임을 알 수 있다. 따라서 기존 정의에서 현재까지 유일한 superlative지수족이었던 r계이차평균지수족이 새로운 정의에서도 superlative지수인 것이 증명되었다.

Ⅳ. Theil-Sato지수의 근사정리

Henri Theil과 Kazuo Sato는 1973～1976 기간중 Törnqvist지수의 문제점을 완화할 수 있는 대안적 디비지아(log-change) 지수산식들에 대해 일련의 논문들

을 발표하였으며 최종적으로 Sato(1976)에 의해 Sato-Vartia지수가 최종적으로 탄생하게 되었다.

Theil(1973)은 본인이 경제학계에 널리 소개한 Törnqvist지수의 문제점으로 요소역전테스트(factor reversal test)를 만족시키지 못하는 점과 부정치테스트(determinateness test)를 만족시키지 못하는 점을 지적하였다. 요소역전테스트라함은 가격지수와 수량지수의 곱이 금액지수가 되는지의 여부이며 부정치테스트는 지수산식이 0(영)의 값에서 연속성을 갖는지의 여부이다. Theil에 의하면 부정치테스트의 관점에서 Walsh(1901)는 다음과 같은 가중치를 갖는 log-change지수를 제안했다고 한다.

$$w_i^{Walsh} = \frac{\sqrt{w_{i,1}w_{i,0}}}{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{w_{j,1}w_{j,0}}} \tag{16}$$

식 (16)은 분자 $\sqrt{w_{i,1}, w_{i,0}}$만을 가중치로 하는 경우 기하평균은 산술평균보다 적으므로 가중치의 합이 1보다 작아지기 때문에 정규화를 한 것이다. Theil은 Walsh와 같이 부정치테스트를 만족시키면서 요소역전테스트는 근사적으로 만족시키는 다음과 같은 가중치함수의 log-change지수를 제안하였다. Theil은 이 지수산식의 요소역전테스트에 대한 근사오차가 식 (16)의 Walsh지수 보다 작음을 증명하였다.

$$w_i^{Theil} = \frac{\left(\frac{w_{i,1}+w_{i,0}}{2}w_{i,1}w_{i,0}\right)^{1/3}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_{j,1}+w_{j,0}}{2}w_{j,1}w_{j,0}\right)^{1/3}} \tag{17}$$

한편, Sato(1974)는 부정치테스트는 만족시키지 못하지만 요소역전테스트는 근사적으로 만족시키는 다음 식 (18)과 같은 가중치의 log-change지수를 제안했다. Sato는 다음 식 (18)의 요소역전테스트에 대한 근사오차가 식 (17)의 Theil지수 보다 작음을 증명하였다.

$$w_i^{Sato} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{w_{i,1}+w_{i,0}}{2}+2\sqrt{w_{i,1}w_{i,0}}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{w_{j,1}+w_{j,0}}{2}+2\sqrt{w_{j,1}w_{j,0}}\right)} \tag{18}$$

Sato(1976)는 최종적으로 요소역전테스트와 부정치테스트를 동시에 만족시키는 log-change지수를 발견하였으며 'ideal log-change' 지수라고 하였다. Vartia(1976)도 동시에 같은 지수를 제시하였으므로 보통 Sato-Vartia 지수라고 한다. Sato-Vartia지수는 다음과 같은 가중치함수를 갖는다.

$$w_i^{S-V} = \frac{L(w_{i,1}, w_{i,0})}{\sum_{j=1}^{n} L(w_{j,1}, w_{j,0})} = \frac{\dfrac{w_{i,1} - w_{i,0}}{\ln w_{i,1} - \ln w_{i,0}}}{\sum_{j=1}^{n} \dfrac{w_{j,1} - w_{j,0}}{\ln w_{j,1} - \ln w_{j,0}}} \tag{19}$$

위에서 $L(x, y)$는 로그평균(logarithmic mean)이라고 하며 Vartia(1976)에서 처음으로 경제학계에 도입된 것으로 알려지고 있다. 로그평균은 다음과 같이 정의된다.

$$L(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{\ln x - \ln y} & , \ x \neq y \\ x & , \ x = y \end{cases} \tag{20}$$

로그평균함수의 합이 1보다 근소하게 작으므로(Barnett *et al.*(2003) 참조) 정규화(normalization)의 필요성이 있다.

최근 Diewert(1992)는 공리적 접근법에 의해서 Fisher지수가 Törnqvist지수 등 여타 지수들에 비해서 탁월한 것으로 평가하였다. 그러나 Balk(1995, 87)는 유사한 공리적 접근법에 의한 비교분석 결과 Fisher지수를 Sato-Vartia지수보다 나은 것으로 평가할 어떤 이유도 없다고 하였다. 또한 Reinsdorf and Dorfman (1999)은 Sato-Vartia 지수가 통과하지 못하는 단조성(monotonicity) 테스트자체가 경제학적 지수이론의 관점에서는 다소 명확하지 않은 것으로 결론내려 Balk와 같이 Sato-Vartia지수를 옹호하는 입장을 보였다.

위에서 제시되고 있는 가중치 함수 w_i^{Walsh}, w_i^{Theil}, w_i^{Sato}, w_i^{S-V}들은 모두 인접한 두 개의 가중치 $w_{i,1}$, $w_{i,0}$에 대해 선형동차이며 대칭적이라는 공통적인 특징을 갖는다. 선형동차이며 $m(x, x) = x$인 함수를 평균함수라고 하며, 특히 $m(x, y) = m(y, x)$인 경우 대칭평균(symmetric mean) 함수라고 한다. 앞에서 제시된 가중치함수들을 모두 대칭평균이며 가중치의 합이 1이 되게 정규화를 하고 있다. 따라서 이들을 일반화하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w_i^{T-S} = \frac{m(w_{i,1} w_{i,0})}{\sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1} w_{j,0})} \tag{21}$$

본고에서는 식 (21)에 정의된 가중치함수 w_i^{T-S}에 의한 log-change지수를 ‘Theil-Sato’ 또는 ‘정규화대칭평균가중치(normalized symmetric mean weight)’ 지수로 정의하면 r계이차평균지수에 비견되는 커다란 지수족을 형성한다. Törnqvist지수, Sato-Vartia지수가 Theil-Sato지수의 대표적 멤버들에 해당하며 Törnqvist 지수는 Theil-Sato지수와 r계평균지수에 동시에 속하는 유일한 지수임을 알 수 있다.

$$\ln P^{T-S} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{m(w_{i,1} w_{i,0})}{\sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1} w_{j,0})} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} \tag{22}$$

다음의 일련의 렘마들과 정리는 Theil-Sato지수들이 경제학적 지수이론의 기본 가정하에 경제학적지수 또는 디비지아적분지수에 이차근사식들임을 증명하고 있다. 이러한 증명에 의하면 Sato-Vartia지수를 비롯하여 앞서 Walsh, Theil, Sato 등의 지수산식들은 모두 경제학적지수 또는 디비지아적분지수에 대한 이차근사식들이다. 본고는 이러한 증명을 위하여 이차근사렘마(quadratic approximation lemma)를 일반화한 확장이차근사렘마(extended quadratic approximation lemma)를 도출하여 사용하였다. 확장이차근사렘마는 다음의 대칭평균근사렘마에 따름정리로 성립한다.

대칭평균근사렘마

산술평균 $(x_1+x_0)/2$와 대칭평균 $m(x_1,x_0)$간에는 $m(x_1,x_0)=\frac{x_1+x_0}{2}+O(\Delta x^2)$의 관계를 갖는다. 이때 $\Delta x = x_1 - x_0$이다.

[증명]

$$\begin{aligned} m(x_1,x_0) &= m\left(\frac{x_1+x_0}{2}+\frac{x_1-x_0}{2}, \frac{x_1+x_0}{2}-\frac{x_1-x_0}{2}\right) \\ &= \frac{x_1+x_0}{2}\, m\left(1+\frac{\Delta x}{x_1+x_0}, 1-\frac{\Delta x}{x_1+x_0}\right) \quad \because m\text{의 선형동차성} \\ &= \frac{x_1+x_0}{2}\, m\left(1+\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right),\ h=\frac{2\Delta x}{x_1+x_0} \end{aligned} \tag{23}$$

식 (23)의 $m(1+h/2,\ 1-h/2)$을 점 (1,1)에서 Taylor 전개하면 다음과 같다.[14)]

$$m\left(1+\frac{h}{2},1-\frac{h}{2}\right)= m(1,1)+\left[\frac{\partial m}{\partial x_1}(1,1)\ \ \frac{\partial m}{\partial x_2}(1,1)\right]\left[\begin{array}{c} h/2 \\ -h/2\end{array}\right]+ \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\left[h/2\ \ -h/2\right]\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 m}{\partial x_1^2}(1,1) & \frac{\partial^2 m}{\partial x_1 \partial x_2}(1,1) \\ \frac{\partial^2 m}{\partial x_1 \partial x_2}(1,1) & \frac{\partial^2 m}{\partial x_2^2}(1,1)\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c} h/2 \\ -h/2\end{array}\right]+O(h^3)$$

$$= 1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial x_1^2}(1,1)\,h^2 = 1+O(h^2)=1+O(\Delta x^2)$$

위에서 $m(1,1)=1, \frac{\partial m}{\partial x_1}(1,1)=\frac{\partial m}{\partial x_2}(1,1)=1/2, \frac{\partial^2 m}{\partial x_1^2}(1,1)=\frac{\partial^2 m}{\partial x_2^2}(1,1)=-\frac{\partial^2 m}{\partial x_1 \partial x_2}(1,1)$ 의 관계가 사용되었다.[15)] 식 (24)를 식 (23)에 대입하면 다음 식 (25)와 같이 증명이 완료된다.

$$m(x_1, x_0) = \frac{x_1+x_0}{2}\, m\left(1+\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right) \tag{25}$$
$$= \frac{x_1+x_0}{2}\left[1+O(\Delta x^2)\right] = \frac{x_1+x_0}{2}+O(\Delta x^2)$$

대칭평균렘마의 타당성은 대표적 대칭평균함수인 로그평균에 대한 Sato(1976, p.224)의 식 (26)에 의하여 대조 확인이 가능하다.

$$L(x,y) = \frac{(x+y)}{2}\ \frac{\left[(1+\frac{h}{2})-(1-\frac{h}{2})\right]}{\left[\ln(1+\frac{h}{2})-\ln(1-\frac{h}{2})\right]}, \quad h=2(x-y)/(x+y) \tag{26}$$
$$= \frac{(x+y)}{2}\ \frac{h}{h+\frac{1}{12}h^3+\frac{1}{80}h^5\cdots}$$
$$= \frac{(x+y)}{2}\left(1-\frac{1}{12}h^2-\frac{1}{180}h^4\cdots\right) = \frac{x+y}{2}+O[(x-y)^2]$$

다음의 확장이차근사렘마(extended quadratic approximation lemma)는 대칭평균렘마의 따름정리로서 Theil의 식 (6) 이차근사렘마를 일반화한 것에 해당한다.

14) Diewert(1978)의 이차미분근사 증명에서 고정된 가격과 수량은 점 (1,1)에 해당한다.
15) Diewert(1978, pp.897-898) 참조.

확장이차근사렘마

$$f(x+h)-f(x) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\frac{\partial f(x+h)}{\partial x_i}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) h_i + O_3 \tag{27}$$

[증명]

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(x+h)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) h_i + O_3 \quad \because \text{이차근사렘마} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[m\left(\frac{\partial f(x+h)}{\partial x_i}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) + O_2\right] h_i + O_3 \quad \because \text{대칭평균렘마} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m\left(\frac{\partial f(x+h)}{\partial x_i}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) h_i + O_3 \end{aligned} \tag{28}$$

이들 렘마를 이용하면 다음과 같이 Theil-Sato지수가 디비지아적분지수에 대한 이차근사함수라는 본고의 대표적 정리를 용이하게 증명할 수 있다.

Theil-Sato 근사정리 : $\ln P^E = \ln P^{T-S} + O_3$ (29)

[증명]

$f(x) = \ln c(p)$, $x = \ln p$로 하고 확장이차근사렘마를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ln\frac{c(p^1)}{c(p^0)} &= \sum_{i=1}^{n} m(w_{i,1}, w_{i,0}) \ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + O_3 \quad \because \text{확장이차근사렘마} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m(w_{i,1}, w_{i,0})}{\sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1}, w_{j,0})} \sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1}, w_{j,0}) \ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + O_3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m(w_{i,1}, w_{i,0})}{\sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1}, w_{j,0})} \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{j,1}+w_{j,0}}{2} [1+O(\Delta w_j^2)] \ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + O_3 \quad \because \text{대칭평균렘마} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m(w_{i,1}, w_{i,0})}{\sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1}, w_{j,0})} [1 + \sum_{j=1}^{n} O(\Delta w_j^2)] \ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + O_3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m(w_{i,1}, w_{i,0})}{\sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1}, w_{j,0})} \ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + O_3 \quad \because \text{가중치차이의 렘마} \end{aligned} \tag{30}$$

위의 정리를 보면 확장이차근사렘마에서 도출된 정규화하기 전의 지수산식 자체도 경제학적지수에 이차근사임을 알 수 있다. 정규화를 위한 대칭함수의 가중치

합도 이차근사이므로 1에 매우 가까운 값일 것이다.

Sato(1976), Lau(1979)는 최적화의 가정하에 CES 단위비용의 비율이 Sato-Vartia지수임을 보였으나 Sato-Vartia지수가 반드시(only if) CES단위비용함수의 비율이라는 증명은 제시하지 못하였다. 따라서 Sato-Vartia지수는 어떤 미지의 신축적 단위비용함수에 일치할 가능성이 남아 있으며, 그런 의미에서 기존 정의에서 Sato-Vartia지수의 superlative여부는 미정인 상태인 것이다.

다음 정리는 Sato-Vartia지수가 임의의 경제학적지수에 대한 이차근사함수라는 본고의 새로운 정의에서 superlative지수라는 것이다. Sato-Vartia지수는 Theil-Sato지수의 특수한 경우이므로 다음의 정리는 따름정리이다. 따라서 새로운 정의에서 Sato-Vartia지수는 다른 대표적 지수산식들과 같이 superlative지수로 분류된다.

따름정리 : Sato-Vartia 근사정리

Sato-Vartia지수는 임의의 경제학적지수에 대해서 이차근사함수이다.

$$\ln P^{E} = \ln P^{S-V} + O_3 \tag{31}$$

Ⅴ. 요약 및 결론

본고는 임의의 경제학적지수를 이차근사(second order approximation)하는 지수산식으로 superlative지수를 새로이 정의하였다. 새로운 정의는 주어진 지수산식과 일치하는 함수의 규명을 생략한 것이나 지수이론에서 신축적 함수의 규명이 갖는 의미가 불분명하다는 점에서 실질적으로 동등한 정의로 판단된다. 새로운 정의에서는 지수산식의 superlative 여부에 대한 판별이 보다 용이하고 Sato-Vartia 지수와 같이 이론적, 실증적으로 중요한 지수가 superlative지수에서 누락되는 기존 정의의 문제점이 해소된다. 본고는 첫째, 경제학적 지수이론의 기본 가정하에서 Diewert(1976)의 r계이차평균지수가 임의의 경제학적지수에 대한 이차근사함수임을 증명하였다. 따라서 기존 정의에 의해서 superlative지수로 평가되던 지수들은 새로운 정의에서도 역시 superlative지수로 평가된다. 둘째, Theil-Sato지수라고

이름한 정규화대칭평균가중치(normalized symmetric mean weight) log-change 지수가 임의의 경제학적지수에 대한 이차근사식임을 보였다. 일치하는 함수의 규명이 어려워 superlative지수 개념을 적용할 수 없었던 Sato-Vartia지수는 Theil-Sato 지수의 특수한 경우이므로 새로운 정의에서 superlative 지수임은 따름정리로서 증명된다. 기존의 정의에서는 Fisher지수, Törnqvist지수 등을 구성원으로 하는 r계이차평균지수만이 superlative지수이었으나 새로운 정의에서는 r계이차평균지수와 함께 Sato-Vartia지수, Törnqvist지수를 구성원으로 하는 Theil-Sato지수라고 이름한 새로운 superlative지수가 추가된다. 또한 확장이차근사렘마 등 유용한 렘마들을 도출하였으며 이들은 새로운 superlative지수의 정의에서 지수산식의 이차근사여부를 판정하는데 유용한 도구로 사용할 수 있을 것으로 기대된다.

〔참고문헌〕

최기홍(2001), "경제학적 지수이론에 의한 디비지아적분지수의 재해석," 『계량경제학보』 제15권 제1호, 한국계량경제학회.

Allen, R. C. and W. E. Diewert(1981), "Direct Versus Implicit Superlative Index Number Formulae," *The Review of Economics and Statistics*, 63, 430-435.

Balk, B. M.(1995), "Axiomatic Price Theory : A Survey," *International Statistics Review*, 63, 69-93.

Barnett, W. A.(1983), "Definitions of 'Second Order Approximations' and of 'Flexible Functional Form'," *Economics Letters*, 31-35.

Barnett, W. A., Ki-Hong Choi, Tara, Sinclair(2003), "Differential Approach to Superlative Index Number Theory," *Journal of the Agricultural and Applied Economics*, Henri Theil Memorial Issue, 59-64.

Diewert, W. E. and A. O. Nakamura(1993), Essays in Index Number Theory Vol.1, North-Holland.

Diewert, W. E.(1992), "Fisher Ideal Output, Input, and Productivity Indexes Revisited," *Journal of Productivity Analysis*, 3, 211-248.

Diewert, W. E.(1981), "Economic Theory of Index Numbers : A Survey, in Essays in the *Theory and Measurement of Consumer Behaviour in*

Honour of Sir Rechard Stone," Edited by A. Deaton, London : Cambridge University Press, 163-208.

Diewert, W. E.(1978), "Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation," *Econometrica*, 46, 883-900.

Diewert, W. E.(1976), "Exact and Superlative Index Numbers," *Journal of Econometrics*, 4, 115-145.

Divisia, F.(1925), "L' Indice Monétaire et la Theorie de la Monnaie," *Revue d' Economie Politique*, 39, 842-861, 980-1008, 1121-1151.

Fulks, W.(1978), *Advanced Calculus*, John Wiley and Sons.

Hulten, C.(1973), "Divisia Index Numbers," *Econometrica*, 41, 1017-1025.

Lau, L. J.(1979), "On Exact Index Numbers," *Review of Economics and Statistics*, 61, 73-82.

Reinsdorf, M. B. & A. H. Dorfman(1999), "The Sato-Vartia Index and the Monotonicity Axiom," *Journal of Econometrics*, 90, 45-61.

Samuelson, P. A. and S. Swamy(1974), "Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality : Survey and Synthesis," *American Economic Review*, 64, 566-593.

Samuelson, P. A.(1983), *Foundations of Economic Analysis*, Harvard Economic Studies; Vol 80, Harvard University Press.

Sato, K.(1974), "Ideal Index Numbers that Almost Satisfy the Factor Reversal Test," *The Review of Economics and Statistics*, 56, 549-552.

Sato, K.(1976), "The Ideal log-change Index Number," *The Review of Economics and Statistics*, 58, 223-228.

Theil, H.(1973), "A New Index Number Formula," *The Review of Economics and Statistics*, 55, 498-502.

Theil, H.(1974), "More on log-change Index Numbers," *The Review of Economics and Statistics*, 56, 552-554.

Theil, H.(1975), Theory and Measurement of Consumer Demand Vol. I, North-Holland.

Vartia, Y. O.(1976), "Ideal log-change Index Numbers," *Scandinavian Journal of Statistics*, 3, 121-126.

Vartia, Y. O.(1978), "Fisher's Five-Tined Fork and Other Quantum Theories of Index Numbers," In *Theory and Economic Applications of Economic Indices*, Edited by W. Eichhorn, R. Henn, O. Opitz and R. W. Shephard (ed.), Würzberg: Physica-Verlag, 271-295.

Vartia, Y. O.(1984), "Descriptive Index Number Theory and the Bank of Finland Currency Index," *Scandinavian Journal of Economics*, 352-364.

Ville, J.(1951), "The Existence Conditions of Total Utility Function," *The Review of Economic Studies*, 19, 123-128, [This is an English translation of Ville(1946)].

〈부 록〉: 증 명

Törnqvist Lemma :

$$\ln P_{r,t} - \ln P_{0,t} = \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} z_{i,t}^{2} + O_3$$

위에서 $z_{i,t} \equiv \ln p_{i,1}/p_{i,0} - \sum_{k=1}^{n} w_{k,t} \ln p_{k,1}/p_{k,0} = O_1$

[증명]

$$P_{r,t} = \left[\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^{r}\right]^{1/r} = \left\{\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\exp\left[r\log\left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)\right]\right\}^{1/r}$$

$$P_{0,t} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\log\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)$$

$$\frac{P_{r,t}}{P_{0,t}} = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\exp\left[r\ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right]\right\}^{1/r}}{\left\{\exp\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} r\ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)\right\}^{1/r}} = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\exp\left(r\ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)}{\exp\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} r\ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)}\right\}^{1/r}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\exp\left[r\left(\ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\ln\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)\right]\right\}^{1/r}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\exp(r z_{i,t})\right]^{1/r}$$

위에서 $z_{i,t} \equiv \ln p_{i,1}/p_{i,0} - \sum_{k=1}^{n} w_{k,t} \ln p_{k,1}/p_{k,0}$

$$\ln\frac{P_{r,t}}{P_{0,t}} = \frac{1}{r}\ln\left[\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\exp(r z_{i,t})\right]$$

$$= \frac{1}{r}\ln\left\{\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}\left[1 + (rz_{i,t}) + \frac{1}{2!}(rz_{i,t})^2 + \frac{1}{3!}(rz_{i,t})^3 + \frac{1}{4!}(rz_{i,t})^4 \cdots\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\ln\left[1 + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}(rz_{i,t})^2 + \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}(rz_{i,t})^3 + \frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}(rz_{i,t})^4 \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}(rz_{i,t})^2 + \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}(rz_{i,t})^3 + \frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t}(rz_{i,t})^4 \cdots\right]$$

$$= \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} z_{i,t}^{2} + O_3$$

위에서 $\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} z_{i,t} = 0$를 사용하였다.

r계이차평균지수의 근사정리 렘마 :

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,1} z_{i,1}^{2} - \sum_{i=1}^{n} w_{i,0} z_{i,0}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0}) z_i$$

위에서 $z_{i,t} \equiv \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \sum_{k=1}^{n} w_{k,t} \ln \frac{p_{k,1}}{p_{k,0}}$, $z_i \equiv \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(w_{k,1}+w_{k,0})}{2} \ln \frac{p_{k,1}}{p_{k,0}}$

[증명]

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,1} z_{i,1}^{2} - \sum_{i=1}^{n} w_{i,0} z_{i,0}^{2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,1}\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \sum_{i=1}^{n} w_{i,1} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} w_{i,0}\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \sum_{i=1}^{n} w_{i,0} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,1}\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,1} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} w_{i,0}\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,0} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,1}\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} w_{i,0}\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,1} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,0} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0})\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,1} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + \sum_{i=1}^{n} w_{i,0} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_{i,1} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \sum_{i=1}^{n} w_{i,0} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0})\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} + w_{i,0}) \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0}) \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0})\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - 2 \ln P_0 \sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0}) \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0})\left[\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 - 2 \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} \ln P_0 + (\ln P_0)^2\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0})\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \ln P_0\right)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0})\left(\ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{i,1} + w_{i,0}}{2} \ln \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_{i,1} - w_{i,0})\, z_i^2$$

〔Abstract〕

Reconsideration of the Superlative Index Numbers in Economic Index Number Theory

Ki-Hong Choi

Diewert(1976) defines an index number as superlative if it is exact for a linearly homogeneous aggregator function or its dual unit cost function that is flexible. The applicability of this definition, however, has been seriously limited by the requirement to identify its exact functional form. This paper interprets the superlative index as its ability to approximate the true economic index number closely to the second order. This interpretation has much more applicability than the original definition and it is virtually the same with the original Diewert's definition in the sense that identification of any particular functional form has no particular value in the index number theory. To prove the usefulness of this interpretation, this paper shows that the quadratic mean of order r index, the unique superlative index number in the original definition and includes such important index numbers as the Fisher, Törnqvist, Walsh as special cases, is also second order approximation to the economic index number.

Keywords: Economic Index Number, Superlative Index, Second Order Approximation, Quadratic Mean of Order r Index