計量經濟學報, 제17권 제2호(2006. 6. 30.), 55-78

Hicks 소비자잉여와 계산 알고리즘

최 기 홍*

Hicks 소비자잉여는 보상소득함수에 의해서 정의된다. 문헌에서 보상소득함수는 Hurwicz and Uzawa(1971)에서는 편미분방정식, Hausman(1981), Vartia (1983)에서는 상미분방정식으로 정의되고 있다. 먼저 본고는 추정된 시장수요함수로부터 보상소득함수를 복구할 수 있는 적분가능성(integrability) 조건 하에서 두 개의 미분방정식은 유일하고 동일한 해를 갖는다는 것을 보였다. 두 형태의 미분방정식 중에서 보상소득을 구하는 목적에는 Hausman-Vartia의 상미분방정식이 보다 유용할 것이다. McKenzie and Pearce(1976), Vartia (1983), Breslaw and Smith(1995), Hausman and Newey(1995) 등의 연구는 Hausman-Vartia 상미분방정식에 수치적 알고리즘을 적용하였다. 그러나 이들 연구에서 사용된 계산 알고리즘들은 일반적으로 추천되는 것들과는 거리가 있다. 본 연구에서는 상미분방정식의 대표적 계산 알고리즘들이 보상소득함수의 계산에 용이하게 적용될 수 있음을 보이고 있다. 본고에서 제안되는 계산 알고리즘은 적분가능성 제약 하에 추정된 시장수요함수로부터 소비자잉여는 물론이고 생계비지수, 사중손실(deadweight loss)의 추정에 사용될 수 있다.

핵심용어 : Hicks 소비자잉여, 보상소득함수, 미분방정식, 수치적 알고리즘

JEL Classifications : D11, D12

I. 서　　론

미시경제 교과서들에서 시장수요함수(또는 Marshallian 수요함수)의 좌측 사다리꼴 면적으로 단순화하여 소개되는 소비자잉여(consumer's surplus)의 개념은 Dupuit(1884)에서 시작되어 Marshall의 저서 “경제원론”에 의해서 널리 알려지게

* 국민연금연구원, 서울시 강남구 논현동 4-15 (135-811), Tel: 02-3218-8640, Fax: 02-541-2901, E-mail: khchoi@nps4u.or.kr

투고일: 2006. 2. 22 심사일: 2006. 2. 23 최종심사완료일: 2006. 5. 25

되었다. 그러나 처음부터 Marshall의 소비자잉여는 소득의 한계효용이 상수가 되어야 한다는 비현실적 가정이 필요한 점이 문제점으로 지적되었다. Hicks는 1940년대 일련의 연구에서 생계비지수(cost of living index)의 개념에 의하여 Dupuit-Marshall 소비자잉여의 문제점을 시정한 새로운 정의를 제안하였다. Hicks 소비자잉여는 시장수요함수 대신 보상수요함수(또는 Hicksian 수요함수)의 좌측 사다리꼴 면적으로 정의된다. Hicks 소비자잉여는 기준 시점에 의해 구분되는 보상변화(compensating variation) 또는 동등변화(equivalent variation)로 많이 알려져 있다.

그러나 Hicks 이후에도 소비자잉여에 대한 논란은 끊이지 않고 있다. 그러한 논란은 새로운 Hicks의 개념이 관찰되지 않는 보상수요함수에 기초하여 그것이 과연 시장수요에 기초한 기존 Dupuit-Marshall 소비자잉여의 문제점을 시정한 것인지를 쉽게 납득하지 못하는 것에서 기인하는 것으로 생각된다.[1] Samuelson (1947, pp.194-95)은 이러한 상황에 대해 Hicks에 의해 수정된 소비자잉여는 생계비지수 이론과 중복(superfluous)이며 소비자잉여의 개념은 혼동을 유발하므로 유해하다는 부정적 의견을 제시하였다. 그러나 해석에 있어 유의할 점은 Samuelson의 의견이 소비자잉여 개념의 가치를 부정한 것이기 보다는 학계의 혼란에 대한 우려와 두 가지 소비자잉여 중에서 Hicks의 정의가 옳다는 것이다.

1970년대 이후 duality이론으로 대표되는 미시경제 이론의 발전으로 소비자잉여는 다시 재조명되기 시작하였다. Hurwicz and Uzawa(1971)는 Hicks 소비자잉여가 편미분방정식에 의하여 정의됨을 보였다.[2] Willig(1976, p.591)는 이를 "해석적 후생경제학의 핵심(heart of analytical welfare economics)"이라고 적었다. Willig는 보상수요함수의 좌측 사다리꼴 면적으로 정의되는 Hicks 소비자잉여는 통계적 오차를 감안하면 관찰 가능한 시장수요함수의 좌측 사다리꼴 면적과 사실상 같으므로 연구자들은 Marshall의 소비자잉여를 사과(apology, e.g. 소득의 한계효용에 대한 상수 가정) 없이 사용할 수 있다고 주장했다. 그러나 Hausman (1981)은 사중손실(deadweight loss)의 측정이라는 관점에서 Willig의 시장수요함수에 의한 소비자잉여의 측정을 반대하였으며 특정한 경우 정확한(exact) 소비자잉여의 측정이 가능하다는 것을 보였다.

---

1) Hausman(1981, p.663, 각주 3)을 인용하면 Varian(1978, p.210)은 "unfortunately, since the Hicksian demand curves are unobservable these expressions do not appear to be useful"이라고 적고 있다.

2) 한편 이 방정식은 Varian(1992, pp.125-7), Mas-collel *et al.*(1995, pp.79-80)에는 적분가능성 방정식(integrability equation)으로 소개되고 있다.

Hausman(1981)은 소비자잉여가 후생경제학에서 가장 널리 쓰이는 도구이며 과거의 논란은 종식되었으며 연구자들 간에 거의 합의에 도달한 것으로 적고 있다. 그러나 아직도 소비자잉여에 대한 많은 이견이[e.g. Takayama(1994)] 존속하고 있으며, Deaton(1986)은 강력하게 이러한 이견들을 이해부족과 오해로 비판하고 있다.3)

본고는 Hicks 소비자잉여가 옳다는 전제하에 계량경제적으로 추정된 시장 수요함수로부터 Hicks 소비자잉여를 정확하게 계산하는 방법에 초점을 두고 있다. McKenzie and Pearce(1976)와 Vartia(1983)의 연구가 Hicks 소비자잉여의 계산방법에 대한 선구적 연구들이다.4) Porter-Hudak and Hayes(1986, 1991)는 Vartia의 소비자잉여 계산 알고리즘에 추정치의 신뢰구간을 계산하기 위하여 분산을 계산하는 알고리즘을 추가하였다. Breslaw and Smith(1995)는 역시 분산의 계산에 초점을 두었지만 Vartia의 알고리즘 보다는 McKenzie and Pearce의 방법을 개선하여 사용하였다. Mas-Collel *et al.*(1995, pp.89-90), Irvine and Sims (1998)도 Breslaw and Smith의 방법을 지지하는 입장이다. Hausman and Newey(1995)는 분산의 산정이 가능하면서 Vartia 보다 정교한 알고리즘을 사용하고 있다. 그러나 이러한 경제학 문헌들에서 사용하는 알고리즘들은 상미방의 문헌들에서 추천되는 대표적 알고리즘과는 거리가 있다는 사실에 주목이 필요하다.

다음 Ⅱ장에서는 Hicks 소비자잉여의 두 가지 형태인 보상변화(compensating variation)와 동등변화(equivalent variation)를 미시경제학의 이론 체계 내에서 수학적으로 명시적으로 나타낸다. 여기에는 화폐단위(money-metric) 간접효용함수의 개념이 중요한 역할을 한다. 다음 Ⅲ장은 Hicks 소비자잉여를 정의하는 Hurwicz and Uzawa의 편미분방정식이 또한 상미분방정식에 의해서 정의될 수 있음을 보이고 있다. 두 개의 방정식은 동등하므로 보다 다루기 편리한 상미분방정식에 대한 계산 알고리즘들로 Hicks의 소비자잉여를 계산할 수 있음을 알 수 있다. 다음 Ⅳ장은 기존 문헌들에서 누락된 상미분방정식에 대한 대표적 계산 알고리즘이 소비자잉여의 계산에 쉽게 적용될 수 있음을 보이고 기존 알고리즘들과

3) "Geometrically, calculating CV or EV is simply a matter of integrating the area under a Hicksian demand curve; there is no valid theoretical or practical reason for ever integrating under a Marshallian demand curve. The very considerable literature discussing the practical difficulties of doing so provides a remarkable example of the elaboration of secondary nonsense which can occur once a large primary category error has been accepted"(pp.1828-9).

4) Deaton and Muellbauer(1980), Hausman(1981)에 의하면 Vartia의 연구는 1970년대 후반에 이미 학계에 알려지고 있었다.

수치적 실험에 대한 비교 결과를 제시하기로 한다. 마지막 V장은 결론과 함께 향후 연구 방향을 제시하고 있다.

Ⅱ. Hicks 소비자잉여의 정의

Marshall 소비자잉여와 같이 Hicks 소비자잉여는 경제 상황의 변화에 따른 후생 변화를 화폐단위로 측정하고자 하는 것이다. Hicks 소비자잉여는 현재(시점 0) 경제 상황을 기준으로 하면 보상변화(CV ; Compensating Variation)이며 변화 이후(시점 1) 경제 상황을 기준으로 하면 동등변화(EV ; Equivalent Variation)라고 한다. 보상변화와 동등변화는 각각 다음과 같이 간접효용함수에 의하여 정의된다.5)

$$v(p^0,\ y^0)\ =\ v(p^1,\ y^0+CV) \tag{1-1}$$

$$v(p^0,\ y^1-EV)\ =\ v(p^1,\ y^1) \tag{1-2}$$

식 (1)에서 $v(p,y)$는 간접효용함수를 나타내며, $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$는 가격의 벡터이고 y는 소득을 나타낸다. 변수들에서 상첨자 1과 0은 각각 현재와 변화 이후를 나타낸다. 식 (1)을 해석하면 보상변화 CV와 동등변화 EV는 각각 변화 후에 변화 전과 동일한 후생을 얻기 위한 최소의 보상액 또는 최대 지불가능 금액을 나타낸다.6)

식 (1)과 같이 간접효용함수에 의하여 암묵적으로 정의된 보상변화와 동등변화는 화폐단위(money-metric) 간접효용함수를 사용하면 화폐단위에 의하여 명시적으로 나타낼 수 있다. 화폐단위 간접효용함수 $\mu(q; p, y)$는 Hurwicz and Uzawa (1971) 이후 Willig(1976), Varian(1992) 등에서 사용되고 있다. 화폐단위 간접효용함수는 식 (2)의 우변과 같이 지출함수(expenditure function)에 의한 간접효용함수의 변환이다.

$$\mu(q;\ p,\ y)\equiv e(q, v(p,y)) \tag{2}$$

5) 예를 들어 Willig(1976, p.591)와 Deaton and Muellbauer(1980, p.186)에서는 EV의 정의에 있어 혼선이 발견된다. 본고는 후자 Deaton and Muellbauer의 정의를 따랐다.

6) 동등변화 EV와 보상변화 CV의 비교는 Varian(1992, p.162), Vives(1987, p.95) 등을 참조.

위에서 지출함수 $e(q, v)$는 기준가격 벡터 q에서 효용수준 v를 얻기 위한 최소의 비용을 의미한다. 지출함수는 일반적으로 주어진 기준가격에서 효용수준에 대해 단조증가함수이므로 식 (2)의 화폐단위 간접효용함수 $\mu(q; p, y)$는 간접효용 $v(p, y)$의 단조변환이며 따라서 선호관계의 관점에서 화폐단위 간접효용함수 $\mu(q; p, y)$는 원래의 간접효용 $v(p, y)$와 동등하다.

기준가격을 변화 후의 가격 $q = p^1$로 한 화폐단위 변환 $e(p^1, v)$를 식 (1-1)의 양변에 적용하면 다음 식 (3)과 같이 보상변화 CV는 화폐단위 간접효용함수에 의하여 명시적으로 나타난다.

$$
\begin{aligned}
e(p^1, v(p^0, y^0)) &= e(p^1, v(p^1, y^0 + CV)) \\
y^0 + CV &= e(p^1, v(p^0, y^0)) \\
CV &= e(p^1, v(p^0, y^0)) - e(p^0, v(p^0, y^0)) = \mu(p^1; p^0, y^0) - \mu(p^0; p^0, y^0)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

위에서 $y^0 \equiv e(p^0, v(p^0, y^0))$의 항등식을 사용하였다. 유사한 방법으로 동등변화 EV도 화폐단위 간접효용함수에 의하여 나타낼 수 있다. 기준가격을 $q = p^0$로 하여 화폐단위 변환 $e(q^0, v)$를 정의 식 (1-2)의 양변에 적용하면 역시 동등변화는 화폐단위 간접효용함수에 의하여 명시적으로 나타나게 된다. 정리하면 식 (1)에 의하여 암묵적으로 정의되었던 보상변화 CV와 동등변화 EV는 식 (4)와 같이 화폐단위 간접효용함수 $\mu(q; p, y)$에 의하여 명시적으로 나타낼 수 있다.

$$CV = \mu(p^1; p^0, y^0) - \mu(p^0; p^0, y^0) \tag{4-1}$$

$$EV = \mu(p^1; p^1, y^1) - \mu(p^0; p^1, y^1) \tag{4-2}$$

결론적으로 Hicks 소비자잉여는 위에서 정의된 식 (4-1) 또는 식 (4-2)의 화폐단위 간접효용함수 $\mu(q; p^0, y^0)$ 또는 $\mu(q; p^1, y^1)$을 구하는 것에 귀착되며, 분석의 초점은 기준가격의 변화에 두어진다는 것에 주목이 필요하다. 화폐단위 간접효용함수의 기호는 지나치게 복잡하여 이후의 전개에는 지출함수에 의한 식 (5)와 같이 Hicks 소비자잉여를 정의하기로 한다.[7]

$$CV = e(p^1, v^0) - e(p^0, v^0) \tag{5-1}$$

$$EV = e(p^1, v^1) - e(p^0, v^1) \tag{5-2}$$

---

7) c.f. Hausman and Newey(1995, p.1446).

위에서 $v^r \equiv v(p^r, y^r)$, $r=0$ 또는 1을 각각 나타낸다.

또한 지금까지는 Varian을 따라 그 명칭을 화폐단위 간접효용함수라 하였으나 Hurwicz and Uzawa의 원래의 명칭 “income compensation function”을 참고하여 앞으로는 ‘보상소득(함수로)’으로 부르기로 한다. 동등변화 EV에 대해서 유사한 논의 전개가 적용될 수 있으므로 이하에서는 보상변화 CV에 대해서만 다루기로 한다.

Ⅲ. 보상소득함수의 미분방정식

Hicks 소비자잉여는 보상소득 $e(p, v)$에 의하여 정의된다. 보상소득은 기준가격 p에 대해서 지출함수이므로 Shephard's lemma[8]라고 하는 중요한 도함수 성질이 있다. 식 (6)은 좌변 보상소득 $e(p, v^0)$의 기준가격 p에 대한 편도함수가 우변 첫 번째 식과 같이 보상수요함수 또는 Hicks 수요함수 $h(p, v^0)$가 된다는 것이다. 우변 두 번째 식은 보상수요와 시장수요의 duality 항등식에 의한 것이다.

$$\frac{\partial e(p, v^0)}{\partial p_i} = h_i(p, v^0) \equiv x_i(p, e(p, v^0)), \quad i=1, \cdots, n \tag{6}$$

Hurwicz and Uzawa(1971)에서 연구되었던 적분가능성(integrability) 문제는 식 (6)을 역으로 즉, 주어진 우변 시장수요함수 $x_i(p, e)$에서 좌변의 보상소득함수를 구하는 것으로 해석하는 것이다. 다음 식 (7)이 그러한 목적의 방정식 체계이다.

$$\frac{\partial e(p, v^0)}{\partial p_i} = x_i(p, e(p, v^0)), \quad i=1, \cdots, n \tag{7-1}$$

$$e(p^0, v^0) = y^0 \tag{7-2}$$

주어진 시장수요함수 $x_i(p, e)$에서 식 (7-1)은 보상소득 $e(p, v^0)$를 미지수로 하는 편미분방정식(partial differential equation) 체계이다. 식 (7-2)는 항등식 $e(p^0, v^0) \equiv e(p^0, v(p^0, y^0)) \equiv y^0$을 나타내며 편미분방정식(편미방)의 경계조건(boundary condition)에 해당한다.[9]

8) c.f. Varian(1992, p.74, p.105).

식 (7)을 Varian(1992, p.127), Mas-colell *et al.*(1995, pp.79-80)은 "적분가능성 방정식(integrability equation)"이라고 한다. 특히, Willig(1976, p.591)는 식 (7)을 "해석적 후생경제학의 핵심(heart of analytical welfare economics)"이라고 적고 있다. 그것은 식 (7)이 Hicks 소비자잉여 또는 후생변화를 화폐단위로 측정하는 보상소득함수 $e(p, v^0)$를 규정하는 식이기 때문이다.

따라서 식 (7)에 대한 해법은 후생경제학에 있어 매우 중요한 가치를 갖게 될 것이다. 먼저 편미방 식 (7)에 유일한 해가 존재할 조건은 적분가능성 조건(integrability condition)이라고 한다. Varian과 Mas-collel에는 적분가능성 조건이 보상소득함수 $e(p, v^0)$의 미분가능성 또는 다음과 같은 Slutsky 조건으로 귀결된다.

$$\frac{\partial x_i(p, e(p, v^0))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, e(p, v^0))}{\partial e} x_j(p, e(p, v^0))$$
$$= \frac{\partial x_j(p, e(p, v^0))}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p, e(p, v^0))}{\partial e} x_i(p, e(p, v^0)) \qquad (8)$$

따라서 식 (8)과 같은 제약조건 하에 추정된 수요함수 체계에 대해서는 원칙적으로 식 (7)을 만족하는 보상소득함수가 존재할 것이다. 다음은 편미분방정식 (7)이 어떤 밀접한 관계의 상미분방정식(ordinary differential equation)으로 전환될 수 있음을 보이고 있다.

편미분방정식 식 (7)은 매개변수 t를 도입하면 상미분방정식 형태로 전환될 수 있다. 기준가격 p를 매개변수 함수 $p(t)$로 하고 $p(0)=p^0$와 $p(1)=p^1$을 잇는 식 (9)와 같은 매개변수(parametrized) 직선으로 나타내기로 한다.

$$p(t) = p^0 + t(p^1 - p^0), \quad t \in [0, 1] \qquad (9)$$

보상소득 $e(p(t), v^0)$을 매개변수 t에 의하여 미분하면 식 (10-1)과 같다. 식 (10-1)에는 식 (7-1)과 식 (9)에서 $dp_i(t)/dt = p_i^1 - p_i^0$를 대입한 것이다. 식 (10-2)는 경계조건 식 (7-2)에 해당하며 초기조건이라고 한다.[10]

$$\frac{de(p(t), v^0)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e(p(t), v^0)}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i(p(t), e(p(t), v^0))(p_i^1 - p_i^0) \qquad (10\text{-}1)$$

$$e(p(0), v^0) = y^0 \qquad (10\text{-}2)$$

9) c.f. Varian(1992, pp.483-484).

10) $e[p(0), v^0] = e[p^0, v(p^0, y^0)] \equiv y^0$.

위의 식 (10)은 우변 시장수요함수를 주어진 것으로 하면 보상소득 $e(p(t), v^0)$를 미지수로 하는 상미분방정식(ordinary differential equation)에 해당함을 알 수 있다.
식 (7)과 식 (10)을 비교하면 식 (7)은 식 (10)의 충분조건임을 알 수 있다. 따라서 식 (7)의 해는 식 (10)의 해이지만 역은 성립하지 않는다. 먼저 적분가능성 조건 식 (8)이 성립하여 식 (7)에 유일한 해가 존재한다고 가정하자. 그러면 그 해는 필요조건 식 (10)을 만족할 것이다. 상미방 초기치 문제에 대한 문헌들에 (e.g. Borrelli and Coleman(2004, p.60, Theorem 2.3.1)의하면 식 (10)에 유일한 해가 존재할 조건은 첫째, 식 (10)의 우변이 연속함수이며 둘째, 식 (10) 우변의 미지수 $e(p(t), v^0)$에 대한 도함수가 연속함수인 것이다. 그런데 이는 시장수요함수가 가격과 소득에 대해 미분가능하다는 미시경제학의 기본 전제에 해당한다. 따라서 식 (10)에는 유일한 해가 존재한다. 결론적으로 식 (8)의 적분가능성 조건이 만족되면 식 (7)과 식 (10)에는 각각 유일한(unique) 해가 존재하며 그 두 해는 동일하다. 이러한 사실들은 다음과 같이 요약된다.

정리. *식 (8)의 integrability조건이 성립하면 편미방 식 (7)과 상미방 식 (10)에는 유일한 해가 존재하고 식 (7)과 식 (10)의 해는 동일하다.*

위의 정리는 Hurwicz and Uzawa에 의해 편미방으로 정의되는 Hicks 소비자잉여를 상미방 식 (10)에 의하여 구할 수 있다는 것을 의미한다. 상미방에는 다양한 계산 알고리즘들이 존재한다.

한편, 상미방 식 (10)은 Hausman(1981),[11] Vartia(1983), Hausman and Newey (1995)가 유도한 상미분 방정식과 동일하다. 이들은 모두 간접 효용함수에 대한 항등식 $v^0 = v(p(t), e(p(t), v^0))$에서 도출된다. 이 항등식을 시간 t에 대하여 미분하면 다음과 같은 항등식을 얻게 된다.

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(p,\ e(p,v^0))}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial v(p,\ e(p,v^0))}{\partial e} \frac{de(p,v^0)}{dt} \tag{11}$$

위에서 소득의 한계효용 $\partial v(p, e(p, v^0))/\partial e$은 0이 아니므로 양변을 나누고 Roy's identity를 적용하면 다음과 같은 항등식이 도출된다.

---

11) Hausman의 참고문헌에는 Vartia(1983)의 발표 전 원고가 인용되고 있다.

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(p,\ e(p,v^0))}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial v(p,\ e(p,v^0))}{\partial e} \frac{de(p,v^0)}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(p,\ e(p,v^0))/\partial p_i}{\partial v(p,\ e(p,v^0))/\partial e} \frac{dp_i}{dt} + \frac{de(p,v^0)}{dt} \qquad (12) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} x_i(p,\ e(p,v^0)) \frac{dp_i}{dt} + \frac{de(p,v^0)}{dt}
\end{aligned}
$$

식 (12)의 항등식은 다시 $p=p(t)$로 놓으면 보상소득 $e(p(t),\ v^0)$에 대한 상미분방정식 (10-1)과 같은 것이다. 본고는 매개변수를 도입한 보상소득 함수로부터 Shephard's lemma를 이용하여 도출하여 proposition을 통하여 적분가능성 방정식 식 (8)이 성립하는 경우 Hurwicz and Uzawa의 편미방과 Vartia-Hausman의 상미방간의 동등성을 명확히 하였다.[12)]

상미방 식 (10)은 중요성에도 불구하고 정확하게 이해되고 널리 알려지지 않은 편이다. 이러한 현상은 Deaton and Muellbauer(1980, p.188)에 기술되고 있다.[13)] 4반세기가 지난 지금도 상황은 크게 변하지 않은 것으로 보인다.

Ⅳ. 계산 알고리즘

Hausman(1981, p.669)은 선형(linear), 대수선형(log-linear) 시장수요함수에 대해 보상소득 $e(p,v^r)\equiv\mu(p;p^r,y^r)$을 해석적으로 도출하였다.[14)] 그러나 일반적으로 상품의 개수가 많은 경우에는 보상소득의 해석적 도출은 가능하지 않으므로 상미방[식 (10)]에 대한 계산 알고리즘에 의하여 근사 값을 구하는 것이 최선이다.

---

12) 본문에서 언급된 도출방법들은 모두 현대 duality의 이론, Shephard's lemma와 Roy's identity를 원용하여 용이하게 미분방정식들을 유도할 수 있었다. 그러나 Samuelson (1948), Bergson(1975) 등의 문헌에 등장하는 상미방도 낯선 형태지만 본질적으로는 동일한 것들로서 판단된다.

13) "We may note that there appears to be a widespread impression in the literature that computation of CV or EV is intrinsically more difficult or requires more information than calculating the area under Marshallian demand functions … In fact this is not so, and there exist several straight forward methods of calculation …, see Vartia(1978)[이는 Vartia(1983)의 유럽계량경제학회에서 발표된 원고이다.].

14) 이들의 예는 상품의 종류가 2개 이하이므로 사실상 독립변수는 한 개인 경우이다. 이 때는 식 (7)이 편미방이 아니라 상미방이다. Hausman이 강조하듯 기타 모든 상품(numerare)과 분석 대상의 2개 상품의 경우는 일반성을 갖는다. Varian(1992, pp.127-8)에도 동일한 내용이 들어있다.

보상소득의 계산에 알고리즘을 적용한 연구들 가운데 McKenzie and Pearce (1976)와 Vartia(1983)가 선구적이다. 특히 Vartia는 식 (10)을 상미방 초기치 문제 (initial value problem)로 인식하고 그에 대한 알고리즘을 제시한 최초의 연구로 보인다.[15] Porter-Hudak and Hayes(1986, 1991)는 Varita의 알고리즘을 사용하여 보상소득을 추정하였으며, 수요함수의 추정계수에 대한 통계 분포로부터 보상소득 추정치의 신뢰구간을 구할 수 있음을 보였다. Breslaw and Smith(1995)는 보상소득 추정치의 신뢰구간을 구하기 위해서는 Vartia의 알고리즘이 적절하지 않다고 지적하고 McKenzie and Pearce와 같이 Taylor 전개에 의한 알고리즘을 제시하고 있다. Irvine and Sims(1998)는 Breslaw and Smith와 대동소이한 알고리즘을 제시하였다. 가장 최근 Hausman and Newey(1995)는 명시적으로 상미방 초기치 문제로 접근하였으나 Vartia와는 다른 계산 알고리즘을 선택하였다.[16]

상미분방정식 초기치 문제와 그에 대한 계산 알고리즘은 수학, 공학 문헌들에서 중요하게 다루어지는 방법론이다. 그러나 본고에서 소개된 경제학 문헌들에서 사용된 알고리즘들은 수학, 공학 문헌들에서 상미방 초기치 문제에 대해 추천하는 대표적 계산 알고리즘과는 거리가 있다.

여기서는 앞서 기존 경제학 문헌들에서 사용된 수치적 접근법들을 McKenzie and Pearce에서 시작된 Taylor 전개방법, Vartia의 방법으로 분류하여 검토하고 그 계산 알고리즘들이 상미방 초기치 문헌들에서 추천하는 알고리즘들과 어떤 점에서 차이가 있는지를 보고자 한다. 비교, 분석 결과 상미방 초기치 문헌들에서 일반적으로 추천하는 계산 알고리즘들이 경제학에서 보상소득의 산정에도 여전히 유효함을 보인다.

1. 기존 알고리즘[17]

Taylor 전개 방법

상미분방정식 문헌들에는 고차 Taylor 방법이 계산 알고리즘의 한 유형으로 소개된다. 경제학 문헌에서 McKenzie and Pearce(1976)는 Taylor 고차 전개에 의하여 원

---

15) 어쩌면 Samuelson(1948)에 등장하는 상미방의 계산 알고리즘 (Lipschitz-Euler)이 사실상 최초인지도 모른다.

16) Richardson Extrapolation 방법에 기초한 Boerlisch-Stoer algorithm을 사용하고 있다.

17) 수식의 단순화를 위하여 미방의 수치적 방법에서 매우 중요한 소구간계산법(discretization scheme)을 무시하였다. 그러나 시점 0과 1을 각각 소 구간의 시점과 종점으로 해석하면 된다.

하는 정밀도로 보상소득을 측정할 수 있다고 주장하였다. 그러나 가격변화 $p^1 - p^0$가 클 경우에는 정밀성을 높이기 위해서 Taylor 전개의 차수를 높이는 동시에 구간을 미세하게 나누어 계산 결과를 순차적으로 누적하는 소구간계산법(discretization scheme, Borrelli, and Coleman, p.125)이 표준적 접근법인데 McKenzie and Pearce (1976)에서는 Taylor 전개의 차수를 높이는 것만을 고려하고 있다.

Breslaw and Smith(1995)는 고차전개 대신 다음 식 (13)과 같이 이차전개로 한정하고 대신 소구간 계산법(discretization scheme)을 사용하여 오차를 줄이고자 하였다. Irvine and Sims(1998)도 대동소이한 이차전개 방법을 소개하고 있다. Mas-Collel *et al.*(1995, pp.89-90)은 이차전개를 사용하면 보다 정밀한 결과를 얻을 수 있음을 설명하고 있다.

$$
\begin{aligned}
e(p^1, u^0) &= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e(p^0, u^0)}{\partial p_i}(p_i^1 - p_i^0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial e^2(p^0, u^0)}{\partial p_i \partial p_j}(p_i^1 - p_i^0)(p_j^1 - p_j^0) + O_3 \\
&= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} h_i(p^0, u^0)(p_i^1 - p_i^0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i(p^0, u^0)}{\partial p_j}(p_i^1 - p_i^0)(p_j^1 - p_j^0) + O_3
\end{aligned} \tag{13}
$$

위의 우변 두 번째 식은 Shephard's lemma에 의하여 관찰되지 않는 Hicks 보상수요 함수 $h_i(p^0, u^0)$ 및 그 도함수에 의해서 보상소득을 나타내고 있다. 마지막 O_3는 3차 이상의 오차항을 나타낸다. 그런데, duality 항등식 $h_i(p^0, u^0) \equiv x_i(p^0, e(p^0, u^0))$에 의하면 기준 시점에는 보상수요를 관찰 가능한 시장수요로 나타낼 수 있으며 역시 보상수요의 도함수 $\partial h_i(p^0, u^0)/\partial p_j$는 Slutsky 관계 식 (14)에 의하여 관찰 가능한 시장수요에 의해서 나타낼 수 있다.18)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_i(p^0, u^0)}{\partial p_j} &= \frac{\partial x_i(p^0, e(p^0, u^0))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p^0, e(p^0, u^0))}{\partial e}\frac{\partial e(p^0, u^0)}{\partial p_j} \\
&= \frac{\partial x_i(p^0, e(p^0, u^0))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p^0, e(p, u^0))}{\partial e} h_j(p^0, u^0)
\end{aligned} \tag{14}
$$

---

18) "we shall see that its derivatives can be easily calculated from observable things, namely, the derivative of Marshallian demand with respect to price and income. This relation is known as the Slutsky equation." Varian, 1992, p.119.

Taylor 전개 방법은 McKenzie and Pearce의 주장처럼 원하는 정밀도를 얻기 위해서는 고차 전개가 필요하다. 특히 식 (14)의 우변을 보면 3차 이상의 도함수는 급격히 복잡해 질 것임을 알 수 있다.[19] 이들 경제학 문헌에서 사용하고 있는 Taylor 전개방법은 상미방 수치 분석에 있어 하나의 계산 방법임에는 틀림없으나 고차도함수가 급격히 복잡해지는 문제점 때문에 실제로는 사용되지 않는다는 점에 주목할 필요가 있다.[20]

Vartia(1983)

Vartia는 세 가지 알고리즘을 제시하였다. Vartia에 의한 알고리즘들의 유도 방법은 Taylor전개와는 다른 방법이지만 결과적인 Vartia의 세 가지 알고리즘은 Taylor 전개방법으로 설명될 수 있다. 먼저 2개의 알고리즘은 각각 Taylor 일차 전개 방법에 해당하는 Euler방법과 Backward Euler방법이다.[21] 그리고 세 번째 알고리즘은 이들 중 가장 중요하여 Taylor전개의 변형으로 볼 수 있으며 Vartia 알고리즘이라고 한다.
다음 식은 첫 번째 방법인 Euler 방법이다. 식 (15)에서 우변 마지막 식은 duality 항등식에 의하여 보상수요를 시장수요함수로 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} e(p^1, u^0) &= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e(p^0, u^0)}{\partial p_i}(p_i^1 - p_i^0) + O_2 \\ &= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} h_i(p^0, u^0)(p_i^1 - p_i^0) + O_2 \qquad (15) \\ &= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} x_i(p^0, e(p^0, u^0))(p_i^1 - p_i^0) + O_2 \end{aligned}$$

다음 식 (16)은 두 번째 알고리즘에 해당하는 Backward Euler방법이다. 식 (15)와 식 (16)은 비슷해 보이지만 큰 차이가 있다. 그것은 식 (16)의 우변과 좌변에 미지수에 해당하는 $e(p^1, u^0)$이 동시에 들어있어 고정점(fixed point) 알고리즘이 추가적으로 필요하다는 점이다.[22]

---

19) 이것이 바로 상미방에서 Taylor전개 방법이 실제로는 사용되지 않는 이유이다. 상미방의 일반적인 형태가 $y' = f(t, y)$이므로 $y'' = \partial f(t, y)/\partial t + \partial f(t, y)/\partial y\, f(t, y)$로서 고차도함수는 급격히 복잡해진다.

20) "The Taylor methods … have the desirable property of high order local truncation error, but the disadvantage of requring the computation and evaluation of the derivatives of … so the Taylor methods are seldom used in practice(Burden and Faires, 1993, p.254).

21) Vartia는 이들 두 방법을 통칭하여 polygon method라고 하였다.

$$\begin{aligned} e(p^1, u^0) &= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e(p^1, u^0)}{\partial p_i}(p_i^1 - p_i^0) + O_2 \\ &= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} h_i(p^1, u^0)(p_i^1 - p_i^0) + O_2 \\ &= e(p^0, u^0) + \sum_{i=1}^{n} x_i(p^1, e(p^1, u^0))(p_i^1 - p_i^0) + O_2 \end{aligned} \tag{16}$$

세 번째는 이들 중에서 가장 중요한 알고리즘이며 상미방의 계산 알고리즘 중의 Adams 1계 보간법(Adams interpolation method of order 1)이다. 이 방법의 결과적인 형태는 식 (15)와 식 (16)의 산술평균에 해당하지만 중요한 것은 오차가 O_3이어서 이차근사 방법이라는 것이다. Balk(1995)에 따르면 이는 일차도함수만으로 이차근사의 효과를 내는 이차근사렘마(quadratic approximation lemma)로 해석할 수 있다.[23]

$$\begin{aligned} &e(p^1, u^0) = \\ &\quad e(p^0, u^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [x_i(p^0, e(p^0, u^0)) + x_i(p^1, e(p^1, u^0))](p_i^1 - p_i^0) + O_3 \end{aligned} \tag{17}$$

이 방법의 중요한 특징이자 단점은 Backward Euler방법과 같이 우변에 미지수 $e(p^1, u^0)$가 들어 있어 고정점 알고리즘에 의하여 $e(p^1, u^0)$를 확정하는 추가적 루틴이 필요한 것이다. Breslaw and Smith는 Vartia 알고리즘에 추가적으로 필요한 고정점 알고리즘이 측정값의 신뢰구간을 구하는데 논리적 제약이 되어 Taylor 이차전개를 선택하였음을 밝히고 있다. Hausman and Newey(1995)도 Vartia에 대해 같은 지적을 하고 있다.

2. 평가 및 대안 : Runge-Kutta 알고리즘

Vartia, Breslaw and Smith, Hausman and Newey 등은 소비자잉여의 측정을 명시적으로 상미분방정식 초기치 문제로 인식하고 계산 알고리즘을 선택하였다. Breslaw and Smith와 Hausman and Newey는 Vartia 알고리즘이 측정값의 신뢰구간을 구하는데 부적합함을 지적하고 각각 Taylor 이차전개 알고리즘과 Boerlisch-Stoer 알고리즘을 제안하였다. Vartia 알고리즘과 Breslaw and Smith

22) 따라서 Euler 방법과 Backward Euler 방법은 같은 일차근사법이지만 후자가 보다 정교한 방법일 것으로 예상된다.

23) Balk는 이뿐만 아니라 Malmqvist(1993)도 이차근사렘마로 해석하고 있다.

의 Taylor 이차전개는 모두 오차항이 O_3로 이차근사식이다. Hausman and Newey (1995)가 사용한 Boerlisch-Stoer 알고리즘은 오차항이 O_5로 4차근사식이어서 월등히 높은 정밀도를 보인다.

그러나 기존 문헌들에서 상미방 초기치 문제의 대표적 알고리즘인 'Runge-Kutta'를 고려하지 않은 것은 의문이다. Runge-Kutta 방법은 상미분 초기치 문제에서 고계 도함수의 형태가 급속히 복잡해지는 일반적인 문제점을 피하기 위한 방법이다.[24] 예를 들어 Runge-Kutta의 방법론에 의하면 Breslaw and Smith의 Taylor 이차근사방법은 Slutsky 조건을 이계 도함수로 사용할 수 있으나 일계 도함수만으로도 같은 정밀도의 알고리즘을 만들 수 있다. 앞서 Vartia 알고리즘 은 그러한 관점에서 일종의 Runge-Kutta 알고리즘으로 볼 수 있다. 즉, 식 (17)은 일계 도함수의 산술평균으로 식 (15) 또는 식 (16)에 비해 한 단계 높은 O_3의 정밀도를 얻은 것을 알 수 있다.

Burden and Faires(1993, p.254-9)에 소개되는 Runge-Kutta 2계 방법에는 Modified Euler, Heun, Mid-point 등이[25] 있는데 이들은 모두 일계 도함수만으로 O_3의 오차항에 해당하는 정밀도를 얻을 수 있다. 다음 식 (18)은 Modified Euler 알고리즘에 의하여 보상소득을 산출하는 식이다. 식 (18)의 K_1, K_2는 각각 상미방 식 (10)에 Runge-Kutta 알고리즘 산식을 적용하여 유도된다.

$$e(p^1, u^0) = e(p^0, u^0) + \frac{K_1 + K_2}{2} + O_3 \tag{18-1}$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i(p^0,\ e(p^0, u^0))(p_i^1 - p_i^0) \tag{18-2}$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\big(p^1,\ e(p^0, u^0) + K_1\big)\big(p_i^1 - p_i^0\big) \tag{18-3}$$

다음 식 (19)는 Runge-Kutta 알고리즘 가운데에서 대표적인 Runge-Kutta 4계 방법이며 본 고에서 제안하는 방법이다.[26] 이 방법은 Taylor 4차 전개에 상당하는 뛰어난 정밀도를 갖는다. 식 (19)는 복잡해 보이지만 사실은 가장 단순한 상미방

24) Runge-Kutta 방법에 대해 본고는 Burden and Faires(1993)와 Borrelli and Coleman (2004)을 참고하고 있지만 모든 공업수학, 수치해석 문헌들에서 다루어진다.

25) Runge-Kutta 방법은 일반적으로 계수비교법으로 도출되는데 제약식이 미지수 보다 적어 무한개의 방법이 있으며 이들은 단지 대표적 유형들인 것이다.

26) Runge-Kutta 3계 방법은 3차 근사이지만 4계 방법에 비해 효율적이지 않으므로 보통 생략된다.

알고리즘에 해당하는 식 (15)와 정확히 같은 구조인 것이다.[27)]

$$e(p^1, u^0) = e(p^0, u^0) + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} + O_5 \tag{19-1}$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i(p^0,\ e(p^0, u^0))(p_i^1 - p_i^0) \tag{19-2}$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{p^0 + p^1}{2},\ e(p^0, u^0) + \frac{1}{2}K_1\right)(p_i^1 - p_i^0) \tag{19-3}$$

$$K_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{p^0 + p^1}{2},\ e(p^0, u^0) + \frac{1}{2}K_2\right)(p_i^1 - p_i^0) \tag{19-4}$$

$$K_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i(p^1,\ e(p^0, u^0) + K_3)(p_i^1 - p_i^0) \tag{19-5}$$

Runge-Kutta 4계 방법은 고정점 알고리즘이 포함된 Vartia 알고리즘에 비해 프로그램도 용이한 것을 알 수 있다. Hausman and Newey(1995)에서 사용된 Boerlisch-Stoer 알고리즘의 오차는 O_5로 Runge-Kutta 4계 방법과 동일하다.

3. 수치 분석

여기서는 앞서 언급되었던 기존 문헌들의 수치적 알고리즘과 본고에서 제안되는 Runge-Kutta 4차 방법을 매우 간단한 문제에 대해 적용하여 비교한다. 사용한 예제는 McKenzie and Pearce(1976, p.467)에 예시된 이후 Vartia(1983, Appendix 2, pp.95-7), Brelaw and Smith(1995, p.319)에 소개된바 있다. 이 예제는 무엇보다도 알고리즘의 비교에 필요한 식 (22)와 같은 보상소득의 정확한 값이 도출가능하다.

두 개 상품에 대한 간접효용함수는 식 (20), 시장수요함수는 식 (21)로 각각 정의되고 있다. 두 개 상품에 대한 단순한 예이지만 사용된 GAUSS 프로그램[28)]은 예를 들어 AIDS 수요모형 체계와 같이 계량경제적으로 추정된 시장수요로 쉽게 확장이 가능한 일반성을 갖는다.

$$v(p, y) = y\left(\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2}\right) \tag{20}$$

---

27) Runge-Kutta 4계 방법에서 식 (19)의 도출에는 길고 복잡한 계수비교법이 필요하다.
28) 부록에 수록하였음.

$$x_1(p,\, y) = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{y}{p_1 + p_2}\right),\;\; x_2(p, y) = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{y}{p_1 + p_2}\right) \tag{21}$$

식 (20)과 같이 단순한 간접효용함수에 대한 보상소득 $e(p^1, v(p^0, y^0)) \equiv \mu(p^1; p^0, y^0)$는 다음 식 (22)와 같이 직접 구할 수 있다. 따라서 식 (21)의 시장수요함수를 이용한 개별 수치적 알고리즘에 의한 추정치와 상대오차를 평가하는 것이 가능하다.[29)]

$$\mu(p^1; p^0, y^0) = y^0 \frac{p_1^1 p_2^1 (p_1^0 + p_2^0)}{p_1^0 p_2^0 (p_1^1 + p_2^1)} \tag{22}$$

또한 수치적 실험을 위하여 변화 전 가격과 소득은 (p^0, y^0)=(1.0, 2.0, 220.0)이며 변화 후 가격과 보상소득은 (p^1, y^1)=(1.1, 1.6923, 220.0), 즉 보상변화 CV=0.0인 것으로 가정하였다.[30)]

비교를 위하여 고려하고 있는 알고리즘은 일차근사 알고리즘으로 Euler, 2차 근사 알고리즘으로 Vartia(Adams interpolation), Breslaw and Smith의 방법에 상당하는[31)] Runge-Kutta 2(RK2), 그리고 본고에서 제안되는 4차 근사 Runge-Kutta 4(RK4) 등 4가지 방법이다. McKenzie and Pearce가 간과하였던 소구간 계산법(discretization scheme)의 필요성을 보이기 위하여 가격변동을 1단계, 2단계, 4단계, 8단계로 한 것을 함께 보여 주고 있다.

<표 1>에 의하면 전체적으로 상대오차는 최대 -1.5% 정도로 전체적으로 작다. 그래서 알고리즘들의 정밀도를 비교하기 위하여 소수점 아래 4자리까지 계산하였다. 먼저 표에서 세로로 1, 2, 4, 8은 소구간의 수이며, 소구간의 수가 많을수록 오차는 적어지는 것을 알 수 있다.

다음에 가로 방향은 알고리즘간의 차이를 보여주고 있다. 1차근사 Euler 방법은 같은 단계에서 다른 알고리즘에 비해 오차가 큰 것을 알 수 있다. 같은 2차근사에 속하는 Vartia 방법과 RK2는 전체적으로 Vartia가 다소 나은 것 같지만 대동소이한 것으로 볼 수 있다. 오히려 프로그램의 난이도와 Breslaw and Smith가 지적

29) 기존 문헌에는 사용하지 못하고 있는데 식 (20)은 Varian(1992, p.56)의 r=-1인 경우에 해당한다.

30) McKenzie and Pearce는 p_1^1과 y^1를 각각 1.0, 220.0으로 가정하였으며 p_2^1=1.6923근 계산된 값이다. 정확한 값 2.2/1.3=1.6923076⋯을 비교에 사용하였다.

31) Breslaw and Smith는 Taylor이차전개식을 사용하지만 2차항에 수치미분을 사용(p.325)하는 점에서 정상적인 알고리즘이 아니어서 대신 Runge-Kutta 2에 속하는 modified Euler 방법을 사용하였다.

한 분산계산을 고려하면 RK2가 우월한 것으로 볼 수 있다. 마지막으로 4차근사에 속하는 RK4는 다른 방법들에 비해 탁월한 정밀도를 보이는 것을 확인할 수 있다. 특히 8개로 소구간 수를 늘이면 소수점 4자리에서 참값을 정확이 찾는 것을 알 수 있다. Vartia(1983, p.96)에는 4단계, 8단계에 대한 결과를 제시하고 있는데 <표 1>과 비교하여 작은 끝자리오차는 발견되지만 동일한 결과인 것이다.

〈표 1〉 알고리즘의 비교

(단위 : 원, %)

	p_1	p_2	참값	Euler	오차(%)	RK2	오차(%)	Vartia	오차(%)	RK4	오차(%)
0	1.0000	2.0000	220.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000
1	1.1000	1.6923	220.0000	223.3846	-1.5385	219.8462	0.0699	219.8752	0.0567	219.9998	0.0001
0	1.0000	2.0000	220.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000
1	1.0500	1.8462	220.8785	221.6923	-0.3684	220.8619	0.0075	220.8619	0.0075	220.8765	0.0009
2	1.1000	1.6923	220.0000	221.7239	-0.7836	219.9649	0.0160	219.9686	0.0143	220.0000	0.0000
0	1.0000	2.0000	220.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000
1	1.0250	1.9231	220.6467	220.8462	-0.0904	220.6442	0.0011	220.6440	0.0012	220.6458	0.0004
2	1.0500	1.8462	220.8785	221.2885	-0.1856	220.8730	0.0025	220.8728	0.0026	220.8765	0.0009
3	1.0750	1.7692	220.6679	221.3042	-0.2883	220.6637	0.0019	220.6637	0.0019	220.6694	-0.0007
4	1.1000	1.6923	220.0000	220.8689	-0.3950	219.9916	0.0038	219.9921	0.0036	220.0000	0.0000
0	1.0000	2.0000	220.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000	220.0000	0.0000
1	1.0125	1.9615	220.3734	220.4231	0.0000	220.3732	0.0001	220.3732	0.0001	220.3734	0.0000
2	1.0250	1.9231	220.6458	220.7465	-0.0456	220.6454	0.0002	220.6454	0.0002	220.6458	0.0000
3	1.0375	1.8846	220.8144	220.9675	-0.0693	220.8138	0.0003	220.8137	0.0003	220.8144	0.0000
4	1.0500	1.8462	220.8765	221.0834	-0.0937	220.8757	0.0004	220.8756	0.0004	220.8765	0.0000
5	1.0625	1.8077	220.8291	221.0913	-0.1187	220.8280	0.0005	220.8280	0.0005	220.8291	0.0000
6	1.0750	1.7692	220.6694	220.9881	-0.1444	220.6680	0.0006	220.6679	0.0007	220.6694	0.0000
7	1.0875	1.7308	220.3941	220.7708	-0.1709	220.3924	0.0008	220.3924	0.0008	220.3941	0.0000
8	1.1000	1.6923	220.0000	220.4361	-0.1982	219.9980	0.0009	219.9980	0.0009	220.0000	0.0000

V. 요약 및 향후 연구방향

소비자잉여에 대한 논란은 Deaton(1986, pp.1828-9)에서 볼 수 있듯이 현재까지 존속하고 있다. 이러한 논란은 원래 Marshall의 소비자잉여와 이후 등장한

Hicks의 소비자잉여간의 선택이다. 대다수의 경제학자들은 Hicks의 소비자잉여를 선택하고 있는 것으로 보이지만 다른 견해를 보이는 일부 경제학자들도 있다. 본고는 Hicks 소비자잉여만을 유의미한 것으로 보는 입장이지만 이러한 논란에 대한 견해보다는 Hicks 소비자잉여를 시장수요로부터 측정하는 방법에 집중하고 있다.

Willig(1976)는 보상소득 $e(p, v^r) \equiv \mu(p; p^r, y^r)$이 '적분가능성 방정식'으로 알려진 Hurwicz and Uzawa(1971)의 편미분방정식의 해임을 지적하였다. 한편 Hausman(1981), Vartia(1983)는 보상소득이 간접효용함수로부터 도출되는 상미분방정식의 해임을 지적하였다. Hausman(1981, p.669)은 매우 단순화된 경우 시장수요함수에 대해 보상소득을 해석적으로 도출하고 'exact'하다고 하였다. 본고는 보상소득에서 직접 Hausman과 Vartia의 상미분방정식을 도출하였으며 적분가능성 조건이 성립하는 경우 Hurwicz and Uzawa의 편미분방정식과 Hausman과 Vartia의 상미분방정식은 각각 유일한 해를 갖으며 두 해는 동일함을 보였다.

이러한 이론적 배경하에서 다루기 쉬운 상미분 방정식의 보상소득을 계산하는 알고리즘들을 비교 검토하였다. McKenzie and Pearce(1976), Vartia(1983), Breslaw and Smith(1995), Hausman and Newey(1995), Irvine and Sims(1998) 등이 보상소득의 계산 알고리즘에 대하여 여러 가지 방법을 제안하였다. 그러나 본 연구는 상미분방정식 초기치 문제의 대표적 알고리즘 Runge-Kutta 4차 방법이 보상소득의 계산 알고리즘으로 사용할 것을 제안한다. 본고는 Runge-Kutta 4차 방법이 보상소득의 계산 알고리즘으로 사용가능함을 보이고 간단한 사례에 대한 수치분석을 통하여 기존 방법들과 비교하였다.

본고에서 연구된 Hicks 소비자잉여의 계산 알고리즘은 두 가지 방향으로 활용이 가능하다. 하나는 Hicks에 의한 새로운 소비자잉여 정의에 바탕이 되었던 생계비지수(cost-of-living index)의 산정에 사용할 수 있다. Porter-Hudak and Hayes (1991)가 중요한 예이다. 또 다른 연구 방향은 Hausman and Newey(1995)의 예와 같은 사중손실(dead weight loss)의 산정이다. 사중손실의 측정에서 핵심은 Hicks 소비자잉여, Hausman and Newey의 경우는 동등변화 EV의 측정이기 때문이다.

〔참고문헌〕

Balk, B. M.(1995), "Approximation of cost-of-living index from demand functions : a Retrospect," *Economics Letters*, 49, 147-155.

Bergson, A.(1975), "A Note on Consumer's Surplus," *Journal of Economic Literature*, 13, 38-44.

Borrelli, R. and C. Coleman(2004), *Differential Equations*, Wiley and Sons Inc.

Breslaw, J. A. and J. B. Smith(1995), "A Simple and Efficient Methods for Estimating the Magnitude and Precision of Welfare Changes," *Journal of Applied Econometrics*, 10, 3, 313-327.

Burden, R. and D. J. Faires(1993), "*Numerical Analysis*," PWS-KENT.

Deaton, A. and J. Muellbauer(1980), *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge University Press.

Deaton A.(1986), "Chapter 30. Demand Analysis," in *Handbook of Econometrics*, Vol. III, ed. Z. Griliches and M. Intriligator, North-Holland.

Dupuit, J.(1844), "De la measure de l'utilite, des travaux publics," Translated in K.J. Arrow and T. Scitovsky, ed. *Readings in Welfare Economics*, Homewood, Irwin.

Hausman, J. A.(1981), "Exact Consumer's Surplus and Deadweight Loss," *American Economic Review*, 71, 4, 662-676.

______ and W. K. Newey(1995), "Nonparametric Estimation of Exact Consumers Surplus and Deadweight Loss," *Econometrica*, 63, 6, 1445-1476.

Hurwicz, L. and H. Uzawa(1971), "On the Integrability of Demand Functions," in *Preferences, Utility and Demand Theory*, ed. J.S. Chipman et al., Harcourt Brace Jovanovich.

Irvine, I. J. and W. A. Sims(1998), "Measuring Consumer Surplus with Unknown Hicksian Demands," *American Economic Review*, 88, 1, 314-322.

Mas-Colell, Whinston, and Green(1995), *Microreconomic Theory*, Oxford University Press.

McKenzie, G. and I. Pearce(1976), "Exact Measures of Welfare and the Cost of Living," *Reviews of Economic Studies*, 43, 3, 465-468.

Porter-Hudak, S. and K. Hayes(1986), "The Statistical Precision of a Numerical Methods Estimator as Applied to Welfare Loss," *Economics Letters*, 20, 255-7.

______(1991), "A Numerical Methods Approach to Calculating Cost of Living Indices," *Journal of Econometrics*, 50, 91-105.

Samuelson, P.(1947), *Foundations* of E*conomic Analysis*, Harvard University Press.

______(1948), "Consumption Theory in Terms of Revealed Preference," *Economica*, 15, 243-53.

Takayama, A.(1982) "On Consumer's Surplus," *Economics Letters*, 10, 35-42.

______(1994), *Analytical Methods in Economics*, Harvester Wheatsheaf.

Varian, H. R.(1992), *Microeconomic Analysis* 3rd. ed., Norton.

Vartia, Y.(1983), "Efficient Methods of Measuring Welfare Change and Compensated Income in Terms of Ordinary Demand Functions," *Econometrica*, 51, 1, 79-98.

Vives, X.(1987), "Small Income Effects : A Marshallian Theory of Consumer Surplus and Downward Sloping Demand," *Review of Economic Studies*, LIV, 1, 87-103.

Willig, R. D.(1976), "Consumer's Surplus Without Apology," *American Economic Review*, 66, 4, 589-597.

〈부록〉 GAUSS 프로그램(Runge-Kutta Method order 4, Runge-Kutta Method order 2, Vartia algorithm)

```
  @ ---------- McKenzie & Pearce's Example (1976, p.467) -----------@
  @ ---------- Runge-Kutta Method order 4  -----------@

cls ;                                          @ clear screen  @

let p0 = 1.0 2.0;                       @ initial price vetor  @
let p1 = 1.1 999;                       @ final price vector  @
p1[2,1]=2.2/1.3;
y0 = 220;                                  @ initial income            @
num_step = 4;                          @ number of steps   @
oldc=y0;

  k = 1;

    do while k <= num_step;              @ iterate through steps         @

       oldp = p0 + (k-1)*(p1-p0)/num_step;          @ k-1 step price    @
       newp = p0 + k*(p1-p0)/num_step;              @ k step price     @

       k1= 1/num_step*q(oldp|oldc)'*(p1-p0);
       k2= 1/num_step*q(0.5*(newp+oldp)|oldc+0.5*k1)'*(p1-p0);
       k3= 1/num_step*q(0.5*(newp+oldp)|oldc+0.5*k2)'*(p1-p0);
       k4= 1/num_step*q(newp|oldc+k3)'*(p1-p0);
     newc=oldc+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
     newx = q(newp|newc);

format /rd 12,4;
print k~newp'~newx'~newc;

       oldc = newc;
       k = k+1;

    endo;

    end;

proc q(v);                              @ demand function                 @
  local pa, pb, y, za, zb;
  pa = v[1]; pb = v[2]; y = v[3];
  za = pb*y/(pa*(pa + pb)) ;
  zb = pa*y/(pb*(pa + pb)) ;
  retp(za|zb);                       @ demand for two commodities @

endp;
```

```
  @ ---------- McKenzie & Pearce's Example (1976, p.467) -----------@
  @ --------- Runge-Kutta Method order 2 (Modified Euler Method) ----@

cls ;                                              @ clear screen   @

let p0 = 1.0 2.0;                          @ initial price vetor   @
let p1 = 1.1 1.6923;                    @ final price vector   @
p1[2,1]=2.2/1.3;
y0 = 220;                                       @ initial income   @
num_step = 4;                              @ number of steps    @
oldc=y0;

  k = 1;

    do while k <= num_step;                @ iterate through steps @

       oldp = p0 + (k-1)*(p1-p0)/num_step;          @ k-1 step price   @
       newp = p0 + k*(p1-p0)/num_step;               @ k step price   @

       k1= 1/num_step*q(oldp|oldc)'*(p1-p0);
       k2= 1/num_step*q(newp|oldc+k1)'*(p1-p0);
     newc=oldc+0.5*(k1+k2);
     newx = q(newp|newc);

format /rd 12,4;
print k~newp'~newx'~newc;

      oldc = newc;
      k = k+1;

    endo;

    end;

  proc q(v);                                    @ demand function   @
  local pa, pb, y, za, zb;
  pa = v[1]; pb = v[2]; y = v[3];
  za = pb*y/(pa*(pa + pb)) ;
  zb = pa*y/(pb*(pa + pb)) ;
  retp(za|zb);                            @ two commodities @

endp;
```

```
   @ -------- McKenzie & Pearce's Example (1976, p.467) --------@
                    @ -------- Vartia's algorithm   --------@

cls ;                                          @ clear screen   @

let p0 = 1.0 2.0;                       @ initial price vetor   @
let p1 = 1.1 1.6923;                     @ final price vector   @
p1[2,1]=2.2/1.3;
y0 = 220;                               @ initial income @
num_step = 4;                            @ number of steps    @
del=(p1-p0)/num_step;
init_c=y0;

  k = 1;

    do while k <= num_step;                   @ iterate through steps   @

       oldp = p0 + (k-1)*del;                      @ k-1 step price   @
       newp = p0 + k*del;                          @ k step price    @
       oldx=q(oldp|init_c);
       oldc=init_c;

  @ Fixed point iteration @

       icnt = 0;
       cont:                                  @ label for jump @
       icnt = icnt + 1;                    @ iteration counter    @

if (icnt==100); "not converged"; end; endif;       @ check for convergence @

       newx = q(newp|oldc);
       newc = init_c + 0.5*1/num_step*(newx+oldx)'*(p1-p0);
       temp = oldc;
       oldc = newc;

format /rd 12,4;
print k~icnt~newp'~newx'~newc;

       if (abs(newc-temp) > .00001);       @ check for convergence @
          goto cont;   endif;

       k = k+1; icnt=0; init_c=newc;

    endo;

    end;

proc q(v);                                @ demand function   @
    local pa, pb, y, za, zb;
    pa = v[1]; pb = v[2]; y = v[3];
    za = pb*y/(pa*(pa + pb)) ;
    zb = pa*y/(pb*(pa + pb)) ;
    retp(za|zb);                        @ demand for two commodities @

endp;
```

〔Abstract〕

Hicksian Consumer's Surplus and Computational Algorithms

Ki-Hong Choi

The Hicksian consumer's surplus is defined by the income consumption function (Hurwicz and Uzawa, 1971, p.116) or the money-metric utility (Varian, 1992, pp.108-113). In the literature it is defined by differential equations; the partial differential equation in Hurwicz and Uzawa (1971) and the ordinary differential equation in Hausman (1981) and Vartia (1983). It is natural that the ordinary differential equation is the preferred one among the two differential equations for computating the money metric utility from the system of estimated market demand function with the integrability condition. McKenzie and Pearce (1976), Vartia (1983), Breslaw and Smith (1995), Hausman and Newey (1995) considered various numerical methods for the computaion of money metric utility. This paper compares and evaluates those algorithms in the economics literature with an algorithm more popular in the mathematics literature by the theoretical approximation orders and numerical relative errors from the exact solution. The algorithm suggested in this paper can be used for the computation of consumer's surplus as well as the cost-of-living index and dead weight loss.

Keywords: Hicksian Consumer's Surplus, Money-Metric Utility, Computational Algorithms