JETEM

Journal of Economic Theory and Econometrics

The Journal of the Korean Econometric Society

(계 량 경 제 학 보)

December 2009

Volume 20. Issue 4. pp.74-107

Optimal Asset Allocation of Korean Financial Assets Using Spectral Risk Measures*

Jin Ho Kim† , **Yoonjeong Kim**‡

Abstract As a coherent risk measure, CVaR or expected shortfall(ES) is limited in terms of applying equal weights to the extreme loss beyond Value-at-Risk regardless of investors' risk aversion. Acerbi(2002, 2004) introduced spectral risk measures(SRMs) that reflect investors' subjective risk aversion. In this study, portfolios are composed of three different Korean financial assets: the KOSPI index, won-dollar exchange rates, and the government bond. The asset allocations derived from ES and SRMs with various risk aversion coefficients are compared. The SRMs model converges to the ES model by imposing equal weights to the loss beyond VaR. The results show that when investors are more risk averse, the weights for high-risk stocks decrease and the weights for low-risk government bonds increase. The efficient frontiers of ES and SRMs show that the risk taken depends on the degree of risk aversion, and that investors select the lower risk portfolio when they are more risk averse. The efficient frontier of ES is one of the various efficient frontiers of SRMs, which implies that asset allocation based solely on ES is not appropriate for very risk-averse investors or conservatively managed portfolios.

Keywords expected shortfall, spectral risk measures, absolute risk aversion coefficient, asset allocation

JEL Classification C15, G11

* We wish to thank Sol Kim for the good comment in the conference, and also the referees for their useful comments. All remaining errors are our own.

† Professor, Ewha School of Business, Ewha Womans University, Email address: jhkim@ewha.ac.kr

‡Ph. D student, Ewha School of Business, Ewha Womans University, Email address: yjkim606@daum.net

Received March 16, 2009, Accepted July 16, 2009

JETEM

Journal of Economic Theory and Econometrics

The Journal of the Korean Econometric Society

(계 량 경 제 학 보)

December 2009

Volume 20. Issue 4. pp.74-107

Spectral Risk Measures를 이용한 우리나라 금융자산의 최적 자산 배분*

김진호†, 김윤정‡

Abstract 대표적 coherent risk measure 인 CVaR 또는 expected shortfall(ES)은 투자자의 리스크회피 정도를 반영하지 않으며, 극단적 손실에 대해 동일한 가중치를 부여한다는 한계를 갖는다. Acerbi(2002, 2004)는 해결책으로서 각 투자자의 리스크회피 정도를 반영하는 spectral risk measure(SRM)를 소개하였다. 본 논문에서는 ES 와 새로운 측정방법인 SRM 을 사용하여 국내 KOSPI, 원/달러 환율 및 국고채의 3 가지 자산으로 포트폴리오를 구성하고, 리스크회피정도에 따른 자산배분비율을 비교하였다. SRM 에서 손실분포의 꼬리부분에 동일한 가중치를 부여하는 리스크회피계수(R)를 이용하여 ES 를 SRM 에 대응시킬 수 있다. 리스크회피계수별 자산배분 결과를 살펴보면, 리스크회피정도가 클수록 고수익/고리스크에 해당하는 주식의 비중이 감소하는 반면 표준편차가 낮은 채권의 비중은 증가하였다. 또한, ES 의 효율적 투자선과 SRM 의 각 리스크회피계수별 효율적 투자선을 도출하여 다음의 두 가지 결과를 확인하였다. 첫째, 리스크회피정도에 따라 리스크 즉, SRM 값이 차이를 보인다. 둘째, 리스크회피정도가 클수록 투자자는 SRM 값이 낮은 포트폴리오를 선택한다. ES 는 SRM 의 수많은 효율적 투자선 중 하나일 뿐이며, 리스크회피정도가 클수록 ES 기준 효율적 투자선과 SRM 기준 효율적 투자선 간 차이가 커진다는 사실도 확인하였다. 따라서 보수적으로 운영되어야 하는 포트폴리오나 리스크회피정도가 큰 투자자들의 경우, ES 를 기준으로 한 자산배분은 적절하지 않을 수 있다.

Keywords expected shortfall, spectral risk measures, 절대리스크회피계수, 최적자산배분

JEL Classification C15, G11

* 2008년 2월 한국증권학회 정기학술발표회에서 발표 당시 토론자로서 수고해 주신 김솔 교수님과 익명의 두 심사자께 감사드린다. 물론 남아있는 오류는 전적으로 저자들의 책임임을 밝혀둔다.
본 연구과정에서 김진호는 이화여자대학교 교내연구비 재임교원지원(2007-1229-1-1)을 받았음을 밝혀둡니다
† 이화여자대학교 경영대학 교수, 이메일 주소: jhkim@ewha.ac.kr
‡ 이화여자대학교 대학원 박사과정, 이메일 주소: yjkim606@daum.net

접수일(2009년 3월 16일), 게재확정일(2009년 7월 16일)

1. 서 론

금융회사의 자본적정성 규제, 경제적 자본(economic capital)의 설정 및 배분에서 정확한 리스크 측정은 필수적 요소이다. 리스크 측정방법으로 표준편차 또는 분산이 갖는 단점들을 극복하여 최근에는 Value-at-Risk(VaR)가 대표적인 리스크 측정방법으로 널리 활용되고 있다. 특히 금융회사 자본규제의 국제적 기준으로 정착된 바젤협약안의 기초개념으로 VaR가 사용됨은 이미 널리 알려진 사실이다. 그러나 VaR 역시 완전한 측정법이 아니며 sub-additivity 결여 등 몇 가지 단점들이 지적되고 있다. Conditional VaR(이하 CVaR) 또는 expected shortfall(이하 ES)등은 VaR를 개선하고자하는 노력의 산물로 간주할 수 있다.

리스크 측정방법들의 공리적 성질(axiomatic characterization)에 대한 연구는 Artzner et al.(1997, 1999)가 coherent risk measure(이하 CRM)에 대한 개념을 제시한 이래 많은 발전을 이루어왔다. CRM은 sub-additivity, positive homogeneity, monotonicity, and translation invariance들을 만족하는 리스크 측정방법의 모범규준이라 할 수 있다.[1] VaR는 일반적으로 sub-additivity를 만족하지 못하므로 CRM으로 볼 수 없다. 더욱이 VaR는 정의상 신뢰수준에 해당하는 기준을 넘어서는 손실에 대해서는 고려하지 않으므로, 신뢰수준을 벗어난 극단적 손실의 측정에 있어서 한계점을 갖는다. 따라서 시장스트레스(market stress) 상황 하에서는 극단적 손실 부분의 분포가 정상성을 벗어나게 되어, 정확한 리스크 측정치로서 VaR의 신뢰성이 하락할 가능성이 더욱 커진다. 이러한 VaR의 결점들을 보완한 개념들로서 ES(Acerbi and Tasche, 2002), CVaR(Rockafellar and Uryasev, 2000), tail conditional expectation(이하 TCE; Artzner et al., 1997, 1999; Pflug, 2000) 등이 등장하였다. 이들은 공통적으로 VaR를 초과하는 극단적인 손실을 추가적으로 고려한다는 특징을 갖는다.

Acerbi and Tasche(2002)는 분위수를 기준으로 한(quantile-based) 리스크 측정치로서 VaR, CVaR, TCE, expected shortfall를 각각 비교하여, ES만이 분포와 상관없이 항상 CRM임을 입증하였다. 또한 CVaR(또는 TCE)는 VaR에 비교하여 우월하지만 일반적으로 CRM이 아니며, 특별히 연속확률분포 경우에만 ES와 같아지고 동시에 CRM이 됨을 보였다. 이외에도 많은 연구들이 ES와 VaR를 비교하여 이론적으로 ES이 CRM이며 VaR보다 우월함을 증명하였다(Consigli, 2004; Rau-Bredow, 2004; Yamai and Yoshiba, 2005). 따라서 ES는 극단적 손실 부분의 분포와 상관없이 항상 CRM을 만족하는 리스크 측정방법으로서 그 의미를 갖는다.

그러나 ES는 대표적 CRM으로서 정의되었음에도 불구하고, VaR를 넘어서는 극단적 손실에 대해 동일한 가중치를 적용하여 기대값을 계산함으로써 tail risk에 대해 투자자가 '리스크

1) (i) sub-additivity: $X,Y,\ X+Y \in V,\ \Rightarrow \rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$, (ii) positively homogeneity: $X \in V,\ h > 0,\ hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$, (iii) monotonicity: $X,Y \in V,\ Y \ge X \Rightarrow \rho(Y) \le \rho(X)$, and (iv) translation invariance: $X \in V,\ a \in R \Rightarrow \rho(X+a) = \rho(X) - a$

중립적'임을 무리하게 가정하고 있다(Dowd and Cotter, 2006). 그러므로 현실적으로 각각의 투자자에게 적합한 리스크 측정방법을 찾기 위해서는, 그들의 서로 다른 리스크회피정도가 리스크 측정방법에 반영될 필요가 있다는 것이 새로운 주장이다. 특히 극단적 손실은 비록 낮은 확률에도 불구하고 발생했을 경우 손실규모가 투자자에게 치명적일 수 있으므로, 이 부분에 대한 정확한 고려가 매우 중요하다는 것이다. 이에 대해, 투자자들이 갖는 리스크 회피정도를 가중치의 변화로 반영함으로서 각각의 투자자들에게 더욱 적합한 리스크 측정치를 제공할 수 있다. 또한 다양한 구성자산으로 이루어지는 포트폴리오의 리스크를 관리하는 경우에도 구성자산의 리스크관리 목적 또는 성향에 따라 극단적 손실에 대해 서로 다른 가중치를 두는 것이 필요할 수도 있다.[2)]

Acerbi(2002, 2004)는 극단적 손실에 대해 서로 다른 가중치를 반영하도록, 기존의 ES을 일반화시킨 리스크 측정방법을 Spectral Risk Measure(이하 SRM)로 정의하였다. 이는 투자자의 주관적 리스크회피 정도를 '리스크회피함수'로서 리스크 측정에 반영함으로써, 동일한 포트폴리오라도 투자자의 리스크회피정도에 따라 리스크 측정값이 달라질 수 있다고 주장한다. 따라서 투자자와 SRM의 일대일 대응이 가능하게 되어, 보다 개별적이고 정확한 리스크 측정이 가능하게 된다는 것이다. 즉, SRM은 모든 투자자에게 동일한 리스크 측정치만을 제공하는 ES의 방법론에서 발전하여, 투자자들의 리스크회피 정도에 따른 개별적 리스크 측정이 가능하도록 하였다.

본 논문에서는 국내 KOSPI, 원/달러 환율 및 국고채의 3개 자산으로 이루어진 포트폴리오를 대상으로 SRM과 ES을 이용한 자산배분전략의 비교를 통해, 투자자의 주관적 리스크회피함수를 고려하는 것이 단순하게 ES을 기준으로 한 경우에 비교하여 자산배분에 있어서 어떤 변화를 가져오는가를 알아보고자 한다. 따라서 본 연구는 자산배분에 있어 평균-분산 모형, 평균-VaR 모형, 그리고 ES(또는 CVaR) 모형 등의 결과를 비교한 김진호(2002), 김진호,김윤전(2003)의 후속 확장연구가 된다.

특히 본 논문은 SRM 모형을 통해 투자자의 서로 다른 리스크회피정도에 따른 효율적 투자선의 변화를 산출하고, SRM 모형과 ES 모형 간 자산배분 결과를 비교하는데 의의가 있다. 만약 SRM과 ES을 이용한 자산배분 간 유의적 차이가 있다면, 금융회사의 리스크회피정도에 따라 SRM을 사용하는 것이 유용할 수 있다. 감독당국으로서도 규제적 자본설정에 있어서 일괄적 기준이 아닌 일대일 대응의 규제를 할 수 있을 것이다.

---

2) Acerbi(2004)는 서로 다른 성격의 포트폴리오인 경우 손실분포가 다를 뿐 아니라 리스크 측정 기간 선정기준이 다르므로 동일한 유의수준(α) 값에 해당하는 ES를 구하는 것이 적절하지 않다고 주장한다. 즉, 투자자가 서로 다른 성격의 포트폴리오들을 동시에 가지고 있는 경우에 전체 포트폴리오(Π)에 대해 유일한 α값에 대응하는 ES(α; Π)를 구하는 것이 바람직하지 않다는 것이다. 전체 포트폴리오(Π)의 정확한 리스크를 측정하기 위해서는 하위포트폴리오(sub-portfolio)의 각각의 성격에 부응하는, 서로 다른 α값에 해당하는 ES 값들을 구한 후에 이들의 개별적 조합(convex combination)을 계산하여야 한다. 결국 동일 포트폴리오라도 하위포트폴리오에 적용되는 가중치에 따라 리스크측정 값이 달라져, 투자자별로 고유한 리스크 측정이 필요함을 제시한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 ES의 일반화된 개념으로서 SRM 개념을 소개하고, SRM에 관한 기존연구, 특히 이때 서로 다른 리스크회피계수가 갖는 경제적 함의에 대해 정리한다. 3장에서는 자료의 기초통계 분석결과를 설명하고, SRM 모형과 ES 모형을 사용한 자산배분의 결과를 비교한다. 마지막으로 4장에서는 결론 및 향후 연구방향을 제시한다.

2. SRM을 사용한 자산배분

2.1. SRM에 관한 기존 연구

ES 및 SRM을 이용한 자산배분 연구는 주로 지금까지 대표적 리스크 측정방법인 VaR를 기준으로 한 자산배분과의 차이를 비교하여 설명하고 있다. 특히 평균-분산모형 및 평균-VaR 모형에 따른 자산배분과 ES을 이용한 자산배분 결과를 비교하는 연구에서는 ES의 개념을 다양하게 정의하여 비교하였다(Mausser and Rosen, 2000; Pflug, 2000; Uryasev, 2000; Andersson et al. 2001; Krokhmal, Palmquist, and Uryasev, 2002; Clemente, 2003).[3)] Rockafellar and Uryasev(2000, 2002)은 CVaR 모형을 제안하여 분포의 정상성 가정 하에서 평균-분산모형 및 평균-VaR 모형의 결과를 비교하고, 나아가 분포의 연속성 가정이 없는 경우에까지 이를 확장하였다. 국내에서는 김진호, 김윤전(2003)이 3개의 자산으로 구성된 포트폴리오를 대상으로, ES을 이용한 자산배분의 결과가 전통적인 평균-분산모형을 사용하였을 경우에 비해 차이가 유의하지 않음을 보였다. Mansini, Ogryczak, and Speranza(2007)은 ES의 확장된 개념으로 multiple ES을 정의하고, 이를 이용하여 포트폴리오 최적화를 한 뒤 Gini's mean difference와 비교하여 설명하였다.

반면에 Acerbi and Simonetti(2002)는 Pflug(2000), Uryasev(2000), Rockafellar and Uryasev(2000, 2001) 등의 ES 방법론을 확장하여 SRM으로 발전시켰다. 또한, Kusuoka(2001)와 Tasche(2002)는 리스크 측정방법의 바람직한 특성으로 law-invariance와 comonotonic additivity를 추가적으로 제시하고, SRM이 이들을 만족하고 있음을 증명하였다.[4)]

많은 연구들은 SRM이 VaR 또는 ES보다 리스크 측정치로서 우월하다는 것을 강조하고 있다. Albanese and Lawi(2004)는 VaR, ES 및 SRM을 분석하여 분산화가 잘 이루어진 시장리스크의 경우에는 리스크 측정 방법들 간에 큰 차이가 없었던 반면, 분포 형태가 연속적이지

3) 연속분포인 경우 ES과 CVaR가 같은 값을 갖는다. 기존 연구들은 주로 CVaR를 사용되었다.

4) (i) law-invariance: $X,Y \in V,\ P[X \le t]=P[Y \le t]$ *for all* $t \in R \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$, (ii) comonotonic additivity: f,g *non-decreasing*, Z *real random variable on* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *such that* $f \circ Z,\ g \circ Z \in V \Rightarrow \rho(f \circ Z + g \circ Z) = \rho(f \circ Z) + \rho(g \circ Z)$

못하고 정규분포와 다른 형태를 보인 신용리스크 측정에 있어서는 SRM이 VaR나 ES 보다 상대적으로 우월함을 증명하였다. Cotter and Dowd(2006)는 S&P500, FTSE100, DAX, Hang Seng, Nikkei 225의 선물계약의 초기증거금을 결정하는데 있어 VaR, ES 및 SRM를 사용한 리스크 측정치를 서로 비교하고, 청산소가 리스크회피 정도에 따라 증거금을 결정할 수 있다는 점에서 SRM이 유용함을 주장하였다.

한편, SRM과 비슷한 개념으로 보험 분야에서는 distortion risk measure (Wang, 1996)가 소개되어 많은 연구가 이루어져왔다(Wang, 2000, 2002; Darkiewicz, Dhaene, and Goovaerts, 2003; Gourieroux and Liu, 2006; Balbas, Garrido, and Mayoral, 2006). Dowd and Blake(2006)는 보험리스크를 측정함에 있어서 VaR, ES, SRM 및 distortion risk measure 등의 장단점을 각각 비교하였다. Gzyl and Mayoral(2006)은 SRM과 distorted risk measures가 이론적으로 서로 연관된 개념임을 증명하였다.

2.2. SRM의 개념

SRM은 ES를 일반화한 개념이므로 먼저 ES의 정의를 살펴보자. 주어진 포트폴리오 Π의 이익 X의 누적분포함수를 $F_X(x) = P[X \leq x]$라고 하면, $F_X(x)$의 일반화된 역함수(generalized inverse)는 다음과 같다(Acerbi et al., 2001; Acerbi, 2002; Acerbi and Tasche, 2002).

$$F_X^{\leftarrow}(p) = inf \ \{x | F_X(x) \geq p\} \tag{1}$$

이를 분위수 값 기준(quantile-based)으로 나타내면, 유의수준 $\alpha \in (0,1]$ 에 대해 α-ES는 α에 해당하는 VaR 값을 넘어서는 손실에 대한 기대 값이므로 다음과 같다.

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(p)dp \tag{2}$$

여기서 Acerbi(2002, 2004)는 투자자의 리스크회피 정도를 나타내는 리스크회피함수(Φ) 개념을 제시하고, 리스크회피함수가 다음의 성질을 만족하는 경우 "허용 가능한 리스크 스펙트럼(admissible risk spectrum)"으로 정의했다.[5]

5) 첫 번째 조건 (i)는 리스크회피함수가 음의 값을 갖는 경우 투자자가 리스크 회피적이라고 볼 수 없으므로, 모든 p에 대해 양(陽)의 값을 가져야 한다는 것이다. 두 번째 조건(ii)은 확률가중치 평균값(probability-weighted average)으로서 가중치의 합이 1이 되어야 한다는 것이며, 마지막 조건(iii)은 더 큰 손실에 더 많은 가중치를 부여하는 것이다. 즉, 리스크회피함수가 non-increasing 해야 한다는 것이다.

$(i) \quad \phi(p) \geq 0 \ \ \forall p$
$(ii) \quad \int_0^1 \phi(p)dp = 1$
$(iii) \quad p_1 < p_2 \Rightarrow \phi(p_1) \geq \phi(p_2)$

구체적으로 리스크회피함수는 "허용 가능한" 리스크 스펙트럼의 성질을 만족하는 한 어떤 형태도 가능하지만, 일반적으로 효용함수에 근거한 지수형태의 리스크회피함수(exponential risk aversion function)를 이용하면 다음과 같다(Dowd and Cotter, 2007).

$$\phi(p) = \frac{Re^{-R(1-p)}}{1-e^{-R}} \tag{3}$$

이때 R∈(0,∞)은 절대리스크회피계수(coefficient of absolute risk aversion)를 나타내며, 이 값이 클수록 극단적 손실부분의 분포가 SRM 값에 큰 영향을 미치게 된다.[6] 만약 분위수(quantile)가 정상성을 갖는다면 주어진 절대리스크회피계수에서 trapezoidal rule을 이용하여 SRM의 근사치를 구할 수 있다(Dowd, 2005).

리스크회피함수 Φ가 허용 가능한 리스크 스펙트럼인 경우, Acerbi(2002)는 다음과 같이 $M_{\Phi}(X)$를 spectral risk measure(SRM)로 정의했다.

$$M_{\phi}(X) = -\int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p)\phi(p)dp \tag{4}$$

이때 다항식형태(polynomial form)를 이용하면 SRM은 다음과 같이 나타낼 수 있다(Albanese and Lawi, 2004).[7]

$$M_d^{\alpha}(X) = -\int_0^{\alpha} p^{\frac{1}{1-d}} F_X^{\leftarrow}(p)dp \tag{5}$$

---

6) (i) Arrow-Pratt에 의해 소개된 절대리스크회피계수는 투자자의 리스크회피 정도를 나타내는 척도로서 효용함수(U(x))의 곡률(curvature)을 이용하여 다음과 같이 정의되며, 리스크회피계수는 리스크회피 정도가 클수록 증가한다. $R_u(x) = -U''(x)/U'(x)$ (ii) 절대리스크회피계수에 관한 Arrow(1965)의 가설에서는 투자자의 리스크에 대한 선호를 DARA(decreasing absolute risk aversion)으로 설정하였다.

7) Albanese and Lawi(2004)에서 리스크회피함수의 다항식형태를 VaR를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$M_d^{\alpha}(X) = \frac{d-2}{d-1}\alpha^{-\frac{d-2}{d-1}} \int_0^{\alpha} p^{\frac{1}{1-d}} VaR^p(X)dp$$

여기서 d≧2 는 자유도(degree of freedom)를 나타낸다.

2.3. SRM을 사용한 최적자산배분 모형

SRM과 ES 모형을 이용한 최적자산배분 모형을 비교해보자.8) 포트폴리오의 기대수익률을 제약조건으로 하여 ES를 최소화하는 것은 (6)번 식에서와 같이 선형계획법을 이용하면 된다 (Acerbi, 2004).9)

$$\min_{w,\psi} \Gamma_{\alpha}^{(N)}(X(w),\psi) = \min_{w,\psi}\left\{-\psi + \frac{1}{N\alpha}\sum_{i=1}^{N} z_i\right\}$$

$$\begin{aligned} & z_i \geq \psi - X_i(w) \quad i = 1,\cdots N \\ & \mu X^T = R_0 \\ & w \in W \subset R^W \\ & \psi \in R \\ & z_i \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

위의 식은 목표 기대수익률 E[X(w)]=μ 제약조건 하에서 ES을 최소화 하는 과정이다. w는 포트폴리오의 자산배분비율을 나타내며, X_i는 자산 i의 수익률을 의미한다. ψ는 ES의 최소화 과정에서 최적화된 α-quantile VaR값을 나타낸다.

반면, SRM의 최소화 과정에서는 ES과 달리 VaR값을 초과하는 극단적 손실에 대해 서로 다른 리스크가중치에 대응하는 수만큼 구분하여, 다음 식에서와 같이 각각 다른 가중치를 부과해야 한다.

8) SRM를 사용하는 포트폴리오의 최적화는 다른 리스크 측정방법을 사용한 경우와 구별되는 특성이 있다. 즉, Acerbi and Simonetti(2002)는 SRM 리스크측정치 M_Φ(X)와 기대수익 E[X]를 갖는 포트폴리오의 리스크-수익간의 최적화문제는, Markowitz의 리스크-수익 관계와 달리 제약조건 없이 SRM M_Φ(X)을 최소화하는 것만으로도 포트폴리오를 최적화한다는 것을 보였다. 이에 대한 자세한 증명과정은 Acerbi and Simonetti(2002) pp.9-10 또는 Acerbi(2004) pp.197-198을 참조바람.

9) 선형계획법을 이용하여 최적 자산배분을 구하는 구체적인 방법은 Acerbi(2004) pp.191-197을 참조바람.

$$\min_{w,\psi} \Gamma_{\alpha}^{(N)}(X(w),\psi) = \min_{w,\psi,z}\left\{\sum_{j=1}^{N-1}\Delta\phi_j\left\{j\psi_j - \sum_{i=1}^{N} z_{ij}\right\} - \phi_N \sum_{i=1}^{N} X_i\right\}$$

$$\begin{aligned} & z_{ij} \ge \psi_j - X_i(w) \quad i=1,\cdots N \\ & \mu X^T = R_0 \\ & w \in W \subset R^W \\ & \psi \in R^J \\ & z_{ij} \ge 0 \end{aligned} \tag{7}$$

위의 식에서 w, X_i는 ES에서와 마찬가지로 각각 자산배분비율과 자산수익률을 나타내며, $\Delta\phi_i \equiv \phi_{i+1} - \phi_i$ (i=1,⋯,N-1)로 정의한다. 리스크회피함수는 성질상 증가하지 않는 형태(non-increasing)를 가져야 하므로 $\Delta\phi_k \le 0$ 가 된다.

2.4. SRM에서 리스크회피계수가 갖는 경제적 함의

앞에서 설명한 바와 같이, SRM은 동일 기대수익률을 갖는 포트폴리오에 대해서도 리스크회피정도에 따라 리스크측정치, 즉 SRM 값이 달라진다. 그리고 리스크회피계수와 SRM 값의 관계는 손실분포가 어떤 모양을 갖는가에 따라 달라진다(Dowd and Cotter, 2007; Dowd et al., 2008).

Dowd and Cotter(2007)는 손실분포가 표준정규분포를 따를 경우, 리스크회피계수의 변화에 따른 SRM 값의 변화가 바람직한(well-behaved) 지수분포 모양을 갖는다는 것을 보였다. Dowd et al.(2008)은 표준정규분포, 코쉬분포, 표준균등(일양)분포, 베타분포, 검벨분포 등 5개의 손실분포 모양을 대상으로 리스크회피계수와 SRM 값의 관계를 분석하고, 손실분포가 코쉬분포(cauchy distribution)의 모양을 갖는 경우에 지수효용함수를 이용한 SRM 값이 리스크회피계수의 변화에 정비례하는 반면 다른 분포들의 경우에는 모두 지수분포에 가까운 형태를 갖는다는 것을 확인하였다. 또한 리스크회피계수가 0에 가까워질수록 SRM 값은 손실분포의 평균값에 수렴한다는 것을 증명하였다.[10] Adam et al.,(2008)은 수익률의 분포가 비정규분포의 형태를 보이는 헤지펀드를 대상으로, SRM을 이용한 최적 포트폴리오를 다른 리스크 측정방법들을 이용한 경우와 비교하였다.

SRM의 개념에서 설명된 허용 가능한 리스크 스펙트럼(admissible risk spectrum)으로서의 리스크회피함수의 성질 중 세 번째 조건에서 등호가 만족하는 경우에는 결국 동일한 가중

10) 수식으로 증명한 부분은 Dowd et al.(2008)의 부록을 참조바람.

치가 적용되는 것과 같으므로, 이것은 결국 ES가 SRM의 특수한 경우에 해당한다는 것을 의미한다(Dowd et al., 2008).[11]

SRM 모형에서 리스크회피계수별 가중치의 변화를 살펴보면([그림 1]), 소수점 이하 두 자리를 기준으로 할 때 R=0.01인 경우에 리스크회피함수 값에 의한 가중치가 동일함을 알 수 있다. 또한 리스크회피계수가 커질수록 손실 분포에 따른 가중치의 변화도 지수함수의 형태로 증가하는 것을 확인할 수 있다. 따라서 SRM모형을 사용할 경우에, 손실 분포에 대한 가중치 측면에서 보면 R=0.01인 경우에는 ES 모형을 사용하는 것과 같은 결과를 갖는다고 간주할 수 있다.

본 논문에서는 손실 분포에 대한 어떠한 가정도 없는 상태에서, 실제 데이터를 기준으로 ES 기준 최적 포트폴리오와 SRM의 리스크회피계수가 0.01인 경우의 최적 포트폴리오를 비교한다. 그리고 나아가서 투자자의 다양한 리스크회피계수에 따른 최적 포트폴리오를 비교한다. 또한, ES 기준 효율적 투자선과 SRM의 다양한 리스크회피계수에 대한 효율적 투자선을 도출하여, 리스크회피계수의 변화가 최적 포트폴리오의 변화에 미치는 영향을 확인한다. 아울러 목표수익률 변화에 따른 각각의 효율적 투자선의 변화를 살펴봄으로써, 궁극적으로 투자자의 리스크회피정도를 고려한 SRM 모형과 ES 모형 간 차이를 비교한다. 투자자가 포트폴리오 리스크를 관리하는데 이들 결과가 어떠한 유용성을 제공하는가를 확인하는데 본 논문의 의의가 있다.

3. 계량분석 결과

3.1. 자료의 기초통계 분석

본 논문에서는 2004년 5월 1일부터 2008년 4월 30일까지의 국내 KOSPI, 원/달러 환율, 3년 만기 국고채 수익률의 207개 주별 자료를 사용한다. 이들 자산의 로그차분 수익률의 평균, median, 최대값, 최소값, 표준편차 및 수익률 공분산은 각각 <표 1>과 <표 2>에 나타나 있다. 단, 국고채의 경우에는 수익률의 로그차분이 아니라 보유기간수익률을 별도로 계산하였다.[12]

3.2. SRM 모형과 ES(expected shortfall) 모형 간 자산배분 비교분석

11) 리스크회피함수의 경우 소수점 이하 두 자리를 기준으로 할 때 R=0.01인 경우 가중치가 동일하게 나타남.
12) 보유기간수익률은 이표지급과 유통수익률 변화에 따른 자본이득을 동시에 고려하여 계산함.

분석기간인 2004년 5월 1일부터 2008년 4월 30일 동안의 주별 데이터를 사용하여, 유의수준 5%(신뢰수준 95%) 하에서 목표수익률 0.20%와 0.30%, 0.40% 각각에 대해 SRM 및 ES을 최소화 시키는 자산배분비율이 <표 3>에 나타나있다. 이론적으로 ES 값과 SRM 값을 최소화 시키는 모형은 다르지만, 절대리스크회피계수(R)가 0.01인 경우 분포의 꼬리(tail) 부분에 주는 가중치가 동일하므로 사실상 ES를 이용한 분포와 동일하다고 해석할 수 있다. 따라서 SRM 모형에서는 1) ES 모형과의 비교를 위해 꼬리부분에 동일한 가중치를 부여하는 절대리스크회피계수(R)가 0.01인 경우와, 2) 리스크회피수준 변화에 따른 자산배분 변화를 확인하기 위해 다양한 절대리스크회피계수(R) 값에 대한 결과를 각각 비교하였다.

<표 3>에서는 다양한 절대리스크회피계수(R) 값과 목표수익률에 대해 SRM 값이 괄호 안에, 그리고 KOSPI, 원/달러 환율, 3년 만기 국고채의 3가지 자산의 배분비율이 순서대로 아랫줄에 나타나 있다. 마지막 줄에는 ES 모형에 따른 ES 값(괄호 안)과 자산배분비율들이 나타나있다.

이를 보면 절대리스크회피계수(R)의 수준에 상관없이 목표수익률이 증가함에 따라 SRM 값도 함께 증가함을 확인할 수 있다.[13] 또한 동일한 절대리스크회피계수(R) 하에서 목표수익률이 커질수록 본 논문의 분석대상 자산들 중 고수익-고리스크에 해당하는 주식의 비중이 커지는 것을 확인하였다. ES 값도 SRM 결과와 마찬가지로 목표수익률이 커질수록 증가하며, 역시 목표수익률이 커질수록 주식의 비중이 증가함을 확인할 수 있다.

그러나 이상의 분석은 선택된 기간의 데이터에 의존하는 점 추정(point estimation) 결과일 뿐이며, 유의수준 5%에 해당하는 분포의 꼬리부분의 데이터 수가 충분하지 않아서 ES 및 SRM 모형들을 이용한 자산배분 결과의 차이를 보다 엄밀하게 분석하기 위해서는 시뮬레이션 분석이 추가적으로 필요하다.

3.3. 모형 간 자산배분에 대한 시뮬레이션 분석

ES 및 다양한 리스크회피계수에 따른 SRM모형에서 자산배분 결과가 어떠한 차이를 보이는가를 밝히기 위해, 본 논문에서는 김진호,김윤전(2003)의 bootstrapping 시뮬레이션 방법을 사용하였다.

bootstrap 시뮬레이션을 위한 기본 추정모형으로 VAR(vector auto-regression)모형을 사용한다. 자산수익률들 간 VAR(n)의 모형 추정에 앞서 먼저 원시계열들의 단위근 검정(Augmented Dickey-Fuller검정)과 요한슨 공적분 검정(Johansen Procedure)을 실시한 결과, 원시계열인 KOSPI, 원/달러 환율, 국채 모두 I(1)과정이며 이들 간에는 공적분관계가 존재하

13) <표 3>은 분석기간 손실분포에 기준한 자산배분의 점추정(point estimation) 결과를 나타내므로, 이후 시뮬레이션과는 차이가 있음.

는 것으로 나타났다. 공적분관계가 존재할 경우 1차 차분한 데이터는 변수들 간의 장기적 관계에 대한 정보를 상실할 가능성이 크므로, 변수들 간의 장기적 균형관계를 보정하기 위해 적절한 벡터오차수정모형(Vector Error Correction Model)의 도입이 필요하다.

한편, VAR(n) 모형에서 적정 시차(n)를 추정한 결과를 보면, AIC(Akaike Information Criteria) 및 SBC(Schwartz Bayesian Criteria) 모두 n=1에서 가장 낮은 수치를 나타내었으나, 시차가 1과 2인 경우에 각종 통계치에서 큰 차이가 없었다. 따라서 계수추정의 오류를 최소화하기 위해 n=2가 적절하다고 판단하고, 본 논문에서는 벡터오차수정모형(Vector Error Correction Model)을 이용하여 VAR(2) 모형을 추정하였다. 자산수익률 간 VAR(2) 모형추정계수는 <표 4>에 나타나 있다.

추정한 VAR(2) 모형을 기반으로 자산수익률에 대한 bootstrap 시뮬레이션을 500번 시행하고, 각각의 시뮬레이션에서 신뢰수준 95%에서 목표수익률 0.30%와 0.40%, 0.50% 각각에 대해 다양한 리스크회피계수 하의 SRM 및 ES 값을 최소화시키는 최적자산배분의 결과를 구하였다.[14)]

첫째, ES 기준 최적 포트폴리오와 SRM의 리스크회피계수 0.01인 경우의 최적 포트폴리오를 직접 비교한 결과가 <표 5>에 나타나 있다. 여기서는 시뮬레이션 결과의 평균치만을 제시하였다. 그리고 SRM과 ES 모형을 이용한 최적자산배분 결과의 시뮬레이션 분포를 비교하기 위해서 신뢰수준 99%에서 두 개의 자산분포의 차이에 대한 각각 평균 및 표준편차, upper bound 및 lower bound를 <표 6>에서 보였다.

리스크회피정도에 따라 더 큰 손실에 대해서 더 많은 가중치를 부과하여 리스크 값을 측정하는 SRM 모형에서 절대리스크회피계수(R)가 0.01인 경우에 손실분포의 꼬리(tail) 부분에 주는 가중치가 동일하므로, 정의상 VaR를 초과하는 꼬리부분에 대해 동일한 가중치를 부과하여 리스크 값을 측정하는 ES와 SRM이 같다고 해석할 수 있다. 그러나 앞서 식(6)과 (7)에서와 같이 SRM과 ES를 최소화하는데 각각 서로 다른 목적함수를 사용하였기 때문에, 시뮬레이션 결과 자산배분의 평균값은 목표수익률에 따라 약간의 차이를 보일 수 있다. <표 6>에서는 지면절약 상 목표수익률 0.3%의 결과만을 제시하고 있으나, 목표수익률이 커질수록 두 모형 간 차이가 감소하여 결과적으로는 차이가 유의하지 않게 됨을 보였다.

따라서 SRM과 ES모형을 직접 비교하기 보다는 ES를 SRM의 리스크회피계수가 0.01인 경우로 대응시켜, SRM의 다른 리스크회피계수들의 경우와 비교함으로서 간접적으로 두

14) 시뮬레이션 500번을 수행하는 데에만 Core2 Quad 컴퓨터에서 18일 정도 걸리는 등 과도한 컴퓨터 시간비용으로 인해 다양한 모수 선정 및 시뮬레이션 수의 확장에 제약이 있을 수밖에 없었다. 본 논문에서 다양한 리스크회피정도에 따른 SRM값 및 최적 자산배분의 비교를 위해 동시에 여러 가지의 리스크회피계수에 해당하는 값을 구하였다는 점을 고려하더라도, SRM 모형을 사용하는 것이 데 있어 계산비용이 큰 것은 한계점으로 지적될 수 있다. 따라서 주어진 리스크회피계수에서 목표수익률 및 손실분포의 꼬리부분에 대한 가중치의 변화 등을 필요한 한도 내에서 가능한 최소화하는 것이 계산비용을 줄일 수 있는 방법 중 하나이다.

모형의 자산배분 차이를 비교 할 수 있을 것이다. ES를 SRM 모형의 리스크회피계수가 0.01인 경우로 대응시켜 다양한 리스크회피계수별 최적 포트폴리오의 자산배분과 비교한 결과는 <표 7>에 나타나 있다.

시뮬레이션 결과의 평균값을 살펴보면, 동일 목표수익률 하에서 리스크회피계수 0.01의 경우 다른 리스크회피계수와 비교하여 최소화한 SRM 값이 가장 높게 나타났다. 그리고 리스크회피정도가 클수록 리스크회피계수 0.01과의 차이는 점점 커지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 리스크회피정도가 큰 투자자들이나 보수적으로 운영되어야 하는 포트폴리오 등의 경우에는 손실분포의 꼬리부분에 동일한 가중치를 부여하는 자산배분을 하는 것이 적절하지 않다는 것을 알 수 있다.

리스크회피정도에 따른 리스크 값의 변화를 살펴보면, 동일 목표수익률 하에서 절대리스크회피계수(R)가 커질수록 투자자는 리스크 회피적이므로 최소화된 SRM 값이 감소하는 것을 확인할 수 있다. 한편, 동일한 절대리스크회피계수(R)에서 목표수익률이 커질수록 리스크 즉, SRM 값이 증가하는 것을 알 수 있다.

최적자산배분 결과를 살펴보면 동일 절대리스크회피계수(R)하에서 목표수익률이 커질수록 수익률이 큰 주식 비중이 증가하며, 원/달러 환율 및 국고채의 비중은 감소하는 것을 확인할 수 있다. 한편, 동일 목표수익률 하에서는 절대리스크회피계수(R)가 커질수록 즉, 리스크회피정도가 심할수록 전체적으로 표준편차가 크고 고수익/고리스크에 해당하는 주식 비중이 감소하며, 동시에 표준편차가 작고 주식과 음의 상관관계를 갖는 다른 자산들의 비중은 증가하는 것으로 나타났다. 또한, 목표수익률별 자산배분 비중 변화를 살펴보면 목표수익률이 자산 중 가장 (기대)수익률이 높은 주식의 평균수익률 보다 더 큰 경우에는 모든 리스크회피계수의 경우에 주식이 절대적인 비중을 차지하는 비슷한 자산배분을 보임을 알 수 있다.

ES 모형은 하나의 효율적 투자선만 존재하지만, SRM 모형을 이용하는 경우에는 투자자의 절대리스크회피계수별로 서로 다른 효율적 투자선이 도출된다.[15] 특히 SRM 모형을 이용한 경우 각각의 서로 다른 리스크회피계수에 대한 효율적 투자선을 도출함으로서, 리스크회피계수의 변화가 포트폴리오의 수익-리스크의 상충관계(trade off)에 미치는 영향을 확인할 수 있다.

SRM이 주관적 리스크회피정도를 포함하는 광의의 리스크측정계수임에도 리스크회피계수별 효율적 투자선의 분석에서 동일 목표수익률 하에서 리스크회피정도가 클수록 SRM 값이 낮은 포트폴리오를 선택하고 동일 리스크회피계수에서는 목표수익률이 커질수록 SRM값이 증가하므로, 전통적 재무이론이 여전히 적용되고 있다는 점을 확인한 것이 의미를 갖는다.

15) Acerbi and Simonetti(2002)는 ES-수익률간의 효율적 투자선이 리스크회피 정도에 따라서 도출되는 수많은 SRM - 수익률간의 효율적 투자선들 중 하나일 뿐이라고 주장했다.

또한 ES에 따른 효율적 투자선은 SRM에서 리스크회피계수(R)이 0.01인 특수한 경우에 해당하는 효율적 투자선이며, 리스크회피정도가 클수록 SRM의 효율적 투자선이 ES를 기준으로 한 효율적 투자선과 차이가 커지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 서로 다른 리스크 선호도를 갖는 투자자들에게 동일하게 ES를 기준으로 자산배분을 하는 것이 적절하지 않다는 것을 알 수 있다.

3.4. 분위수별 SRM 값에 대한 분석

시뮬레이션에서 산출된 손실분포에 대한 각 분위수별 SRM 값들을 분석해보면 동일 목표수익률 하에서 리스크회피정도가 낮을수록 SRM값의 변동성이 더 커지는 것을 알 수 있다.[16) 예를 들어, 목표수익률 0.30%에서 리스크회피계수가 100인 경우에 최소화된 SRM값의 0.05% 분위수에 해당하는 값과 0.95% 분위수에 해당하는 값의 범위가 0.523에서 5.744인 반면, 리스크회피계수가 0.01인 경우에는 분위수 값의 범위가 0.986에서 7.684로 SRM값의 변동성이 더 큰 것으로 나타났다. 이것은 리스크회피정도가 낮을수록 자산배분에서 고수익/고리스크에 해당하는 주식의 비중이 증가하기 때문에, 그에 따라 리스크 값의 변동성도 커지는 것으로 해석될 수 있다.

또한, 리스크회피계수별 SRM값의 분포는 목표수익률이 증가할수록 각 분위수 값을 기준으로 차이가 커지는 것을 확인할 수 있다. 목표수익률이 높을수록 리스크회피계수별 리스크 값의 분포의 차이도 더욱 증가하기 때문에, 그만큼 리스크회피정도에 따른 자산배분의 중요성이 강조된다.

[그림 2], [그림 3], [그림 4]는 각각의 목표수익률에 대한 500번의 시뮬레이션 결과 최소화된 SRM값의 분포를 나타낸 것으로, 각 리스크회피계수에 따른 SRM값의 변화를 분위수 값을 기준으로 제시하였다. 마지막으로 [그림 5]는 각각의 목표수익률별로 리스크회피계수에 따른 SRM값의 변화를 나타낸 것이다.

리스크회피계수별 SRM값의 변화를 보면 동일 목표수익률 하에서 투자자의 리스크회피정도가 클수록 SRM값이 낮아지는 것을 알 수 있다. 이것은 리스크회피정도가 클수록 투자자들이 리스크 즉, SRM값이 낮은 포트폴리오를 선택하기 때문이다. 주어진 목표수익률 하에서 투자자의 리스크회피정도가 클수록 자산배분에 있어 표준편차가 큰 주식의 비중이 감소하고, 동시에 표준편차가 작은 채권의 비중이 증가하는 앞서의 점추정 결과와 시뮬레이션 결과가 일치한다. 또한 목표수익률 0.30%에서 0.50%까지의 리스크회피계수별 SRM값의 민감도를 살펴보면, 목표수익률이 높을수록 리스크회피계수별 SRM값의 편차

16) ES 모형 및 SRM 모형의 자산비중 별 분위수 값과 목표수익률별 SRM 모형의 최소화된 분위수 값은 <부록표 1>과 <부록표 2>에 각각 첨부하였다.

가 증가하는 것을 알 수 있다. 이것은 목표수익률이 커질수록 리스크회피정도가 작은 투자자의 리스크 값이 증가하는 것에 비해 리스크회피정도가 큰 투자자의 리스크 값이 상대적으로 덜 증가하기 때문으로 해석되나, 이에 대한 보다 엄밀한 주장은 추후 연구를 필요로 한다.

4. 결론 및 향후 연구방향

coherent risk measure의 대표적 측정방법인 expected shortfall(ES)은 많은 장점에도 불구하고, 투자자의 서로 다른 리스크회피 정도를 반영하지 못하며 포트폴리오의 특성과 상관없이 극단적 손실 부분의 비중을 동일하게 간주하는 한계를 갖는다. 이에 대한 해결책으로서 리스크 측정방법에 투자자의 주관적 리스크회피 정도를 반영하는 spectral risk measure(SRM)가 소개되었다.

본 논문에서는 국내 KOSPI, 원/달러 환율 및 국고채의 3개 자산으로 이루어진 포트폴리오를 대상으로, 투자자의 주관적 리스크회피함수를 고려하는 SRM과 그렇지 않은 ES 기준 자산배분전략을 비교분석하였다. 분석기간인 2004년 5월 1일부터 2008년 4월 30일까지의 주별 데이터를 사용한 ES와 SRM 모형의 자산배분의 점 추정 결과와 bootstrapping 시뮬레이션 추정 결과에 대한 분석을 요약하면 다음과 같다.

첫째, SRM모형에서 리스크회피계수 R=0.01 경우에는 꼬리분포에 대해 동일한 가중치를 부여하므로 이론적으로 ES와 비슷해진다. 따라서 ES와 SRM을 비교하기 위해서는 ES를 SRM의 리스크회피계수가 0.01인 특수한 경우로 대응시키고, 이를 다양한 리스크회피계수를 적용한 SRM들과 비교하면 된다. 주어진 목표수익률 하에 SRM 값을 최소화한 시뮬레이션 결과들을 분석해보면, 리스크회피정도가 클수록 고수익/고리스크에 해당하는 주식의 비중이 작아지며 표준편차가 작은 채권의 비중이 상대적으로 커지는 것으로 나타나 재무이론에 부합함을 알 수 있었다.

둘째, ES 기준 효율적 투자선과 SRM을 이용한 각각의 리스크회피계수별 효율적 투자선을 비교분석한 결과, 동일 목표수익률 하에서도 리스크회피정도에 따라 SRM 값이 크게 차이가 나는 것을 확인할 수 있었다. 즉, 동일 목표수익률에 대해 리스크회피정도가 클수록, SRM 값이 낮은 포트폴리오를 선택한다는 것을 확인할 수 있다. 이것은 리스크회피정도가 다른 투자자들이 각각 다른 자산배분 전략을 구사하는 사실을 설명하는 근거가 된다.

셋째, ES에 따른 효율적 투자선은 SRM에 의한 수많은 효율적 투자선들 중 리스크회피계수가 0.01에 해당하는 특수한 경우일 뿐이며, 리스크회피정도가 클수록 SRM의 효율적

투자선과 ES를 기준으로 한 효율적 투자선의 차이가 증가하는 것을 확인할 수 있다. 따라서 보수적으로 운영되어야 하는 포트폴리오나 리스크회피정도가 큰 투자자들의 경우에는 ES를 기준으로 한 자산배분이 적절하지 않을 수 있다는 것을 알 수 있다.

본 논문은 마르코비츠의 평균-분산 모형에 따른 자산배분 이론을 평균-VaR, 평균-CVaR(ES) 모형에 이어 평균-SRM으로 확장하여, 이를 국내 자산수익률에 적용하고 시뮬레이션 분석을 통해 기존 모형들과의 차이를 분석했다는 점에서 의의를 갖는다. 특히 다양한 리스크회피계수들 별로 자산배분 결과 및 효율적 투자선의 변화를 추정하고, 이에 대한 경제적 함의를 분석하고자 했음은 기존 연구와 차별화될 수 있다.

향후 연구에서는 실제 금융회사들 또는 투자자들이 본 논문에서 밝혀진 결과들을 투자에 활용하는 데 당면하는 현실적 문제들을 분석하고, 이때 본 논문에서 사용된 모형의 제약점들을 확장함이 바람직할 것이다. 또한 실무에서 SRM 모형을 적용하는데 있어 한계점으로 지적되는 과다한 계산비용의 부분에서도 방법론적 개선이 요구된다.

■ 참고문헌

김진호, 2002, 평균-분산 모형과 평균-VaR 모형간 최적리스크자산배분 전략 비교, 재무연구 15권 2호, 143-172.

김진호·김윤전, 2003, Conditional VaR 모형을 사용한 최적자산배분에 관한 연구:평균-분산 모형과 비교, 증권학회지 32집 3호, 133-164.

Acerbi, C., 2002. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion, Journal of Banking and Finance 26, 1505-1518.

Acerbi, C. and Simonetti, P., 2002, Portfolio Optimization with Spectral Measures of Risk, Working paper, available in www.gloriamundi.org.

Acerbi, C. and Tasche, D., 2002, Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk, Economic Notes 31(2), 379-388.

Acerbi, C. and Tasche, D., 2002, On the Coherence of Expected Shortfall, Journal of Banking and Finance 26, 1487-1503.

Acerbi, C., 2004, Coherent Representations of Subjective Risk-Aversion, In G. Szegö (Ed.), Risk Mearuses for the 21st Century, Wiley, New York, 147-207.

Adam, A., Houkari, M., and Laurent, J. P., 2008. Spectral Risk Measures and portfolio selection, Journal of Banking and Finance 32, 1870-1882.

Albanese, C. and Lawi, S., 2004, Spectral Risk Measures for Credit Portfolios", In G. Szegö (Ed.), Risk Mearuses for the 21st Century, Wiley, New York, 209-226.

Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., and Uryasev, S., 2001, Credit Risk Optimization with Conditional VaR Criterion, Mathematical Programming, Series B 89(2), 273-291.

Arrow, K. J., 1965, Aspects of the Theory of Risk Bearing, Helsinki.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D., 1997, Thinking Coherently, Risk 10, 68-71.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D., 1999, Coherent measures of risk, Mathematical Finance 9, 203-228.

Balbas, A., Garrido, J., and Mayoral, S., 2006, Properties of distortion risk measures, Working paper, available in www.gloriamundi.org.

Cheng, S., Liu, Y. and Wang, S., 2004, Progress in Risk Management, Advanced Modelling and Optimization 6(1), 1-20.

Clemente, A., 2003, The Empirical Value-at-Risk/Expected Return Frontier: A Useful Tool of Market Risk Managing, Working paper, available in www.gloriamundi.org.

Cotter, J. and Dowd, K., 2006, Extreme Spectral Risk Measures: An Application to Futures Clearinghouse Margin Requirements, Journal of Banking and Finance 30, 3469-3485.

Csóka, P., Herings, P. and Kóczy, L., 2006, Coherent Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective, Research Memoranda, Maastricht: METEOR, Maastricht Research School of Economics of Technology and Organization.

Consigli, G., 2004, Estimation of tail risk and portfolio optimization with respect to extreme measures, In G. Szegö (Ed.), Risk Mearuses for the 21st Century, Wiley, New York, 365-401.

Darkiewicz, G., Dhaene, J., and Goovaerts, M, 2003, Coherent Distortion Risk Measures-A Pitfall, Mimeo. Faculty of Economics and Applied Economics, K..U. Leuven.

Dowd, K., 2005, Spectral Risk Measures, Financial Engineering News 42, 11-12.

Dowd, K. and Blake, D., 2006, After VaR: The Theory, Estimation, And Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measures, Journal of Risk and Insurance 73(2), 193-229.

Dowd, K. and Cotter, J., 2007, Exponential Spectral Risk Measures, The ICFAI Journal of Mergers and Acquisitions 5(4), 57-66.

Dowd, K., Cotter, J. and Sorwar, G., 2008, Spectral Risk Measures: Properties and Limiations, Journal of Financial Services Research 34(1), 61-75.

Giannopoulos, K. and Tunaru, R., 2005, Coherent risk measures under filtered historical simulation, Journal of Banking and Finance 29, 979-996.

Gourieroux, C. and Liu, W., 2006, Sensitivity Analysis of Distortion Risk Measures, Working paper, available in www.gloriamundi.org.

Gzyl, H. and Mayoral, S., 2006, On a relationship between distorted and spectral risk measures, MPRA paper 916, University Library of Munich, Germany.

Krokhmal, P., Palmquist, J. and Uryasev, S., 2002, Portfolio Optimization with Conditional VaR Objective and Constraints, Journal of Risk 4(2), 11-27.

Kusuoka, S., 2001, On law invariant coherent risk measures, Advances in Mathematical Economics. 3, 83-95.

Lüghi, H.J. and Doege, J., 2005, Convex Risk Measures for Portfolio Optimization and Concepts of Flexibility", Mathematical Programming, Series B 104(2-3), 541-559.

Mansini, R., Ogryczak, W., and Speranza, M. G., 2007, Conditional Value at Risk and Related Linear Programming Models for Portfolio Optimization, Annals of Operations Research 152(1), 227-256.

Mausser, H. and Rosen, D., 2000, Efficient Risk/Return Frontiers for Credit Risk, The Journal of Risk Finance 2(1), 66-78.

Overbeck, L., 2004, Spectral Capital Allocation, In A. Dev(Ed.), Economic Capital: A Practitioner Guide, Risk books, London.

Pflug, G. C., 2000, Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk, In S. Uryasev (Ed), Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications, Kluwer Academic.

Rau-Bredow, H., 2004, Value-at-risk, expected shortfall and marginal risk contribution, In G. Szegö (Ed.), Risk Mearuses for the 21st Century, Wiley, New York, 61-68.

Rockafellar, R. T. and Uryasev, S., 2000, Optimization of Conditional VaR, Journal of Risk 12(3), 21-41.

Rockafellar, R. T. and Uryasev, S., 2002, Conditional VaR for General Loss Distribution, Journal of Banking and Finance 26, 1443-1471.

Sharpe. W. F., 2007, Expected Utility Asset Allocation, Financial Analysts Journal 63(5), 18-30.

Szegö, G., 2002, Measures of risk, Journal of Banking and Finance 26, 1253-1272.

Szegö, G., 2005, Measures of risk, European Journal of Operational Research 163, 5-19.

Tasche, D., 2002, Expected Shortfall and Beyond, Journal of Banking and Finance 26(7), 1519-1533.

Uryasev, S., 2000, Conditional VaR: Optimization Algorithms and Applications, Financial Engineering News 14, 1-5.

Wang, S. S., 1996, Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density, ASTIN Bulletin 26, 71-92.

Wang, S. S., 2000, A Class of Distortion Operations for Pricing Financial and Insurance Risk, Journal of Risk and Insurance 67, 15-36.

Wang, S. S., 2002, A Risk Measure That Goes Beyond Coherence, Working paper, SCOR Reinsurance Co, Itasca, IL.

Yamai, Y. and Yoshiba, T., 2005, Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective, Journal of Banking and Finance 29, 997-1015.

부 록 :

<부록표 1> ES 및 SRM 모형의 자산비중별 분위수 값

목표수익률	0.30%			0.40%			0.50%		
ES	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't
0.05th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.25th	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.5th	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.75th	1.000	0..167	0.800	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.9th	1.000	0.291	0.910	1.000	0.144	0.855	1.000	0.000	0.000
0.95th	1.000	0.340	0.951	1.000	0.206	0.905	1.000	0.055	0.867

R=0.01	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't
0.05th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.093	0.000	0.000
0.1th	0.000	0.000	0.000	0.024	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.25th	0.047	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.5th	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.75th	1.000	0.143	0.701	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.9th	1.000	0.276	0.852	1.000	0.117	0.779	1.000	0.000	0.000
0.95th	1.000	0.325	0.893	1.000	0.187	0.854	1.000	0.032	0.783

R=1	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't
0.05th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.088	0.000	0.000
0.1th	0.000	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.25th	0.047	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.5th	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.75th	1.000	0.142	0.702	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.9th	1.000	0.271	0.860	1.000	0.125	0.778	1.000	0.000	0.000
0.95th	1.000	0.325	0.904	1.000	0.183	0.852	1.000	0.032	0.800

R=5	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't
0.05th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.093	0.000	0.000
0.1th	0.000	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.25th	0.041	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.5th	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.75th	1.000	0.148	0.706	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000

0.9th	1.000	0.276	0.861	1.000	0.125	0.779	1.000	0.000	0.000
0.95th	1.000	0.334	0.904	1.000	0.183	0.849	1.000	0.032	0.783

R=25	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't
0.05th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.042	0.000	0.000
0.1th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.25th	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.5th	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.75th	1.000	0.161	0.748	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.9th	1.000	0.285	0.877	1.000	0.131	0.817	1.000	0.000	0.000
0.95th	1.000	0.336	0.906	1.000	0.202	0.883	1.000	0.040	0.818

R=50	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't
0.05th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.25th	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.5th	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.75th	1.000	0.162	0.786	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.9th	1.000	0.291	0.884	1.000	0.133	0.844	1.000	0.000	0.000
0.95th	1.000	0.337	0.924	1.000	0.202	0.896	1.000	0.051	0.880

R=100	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't	kospi	won/$	gov't
0.05th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1th	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.25th	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.5th	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.75th	1.000	0.162	0.767	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.9th	1.000	0.284	0.879	1.000	0.143	0.844	1.000	0.000	0.000
0.95th	1.000	0.336	0.918	1.000	0.204	0.905	1.000	0.048	0.867

<부록표 2> ES 및 SRM의 목표수익률별 분위수 값

분위수	ES	R=0.01	R=1	R=5	R=25	R=50	R=100
목표수익률(0.30%)							
0.05th	6.961	0.986	0.977	0.944	0.913	0.787	0.523
0.1th	7.488	1.271	1.274	1.227	1.131	0.982	0.651
0.25th	9.180	1.949	1.970	1.877	1.663	1.426	1.058
0.5th	19.381	3.649	3.657	3.572	3.124	2.687	2.065
0.75th	23.575	5.562	5.554	5.440	5.068	4.452	3.487
0.9th	26.225	7.243	7.237	7.121	6.600	5.974	4.720
0.95th	27.375	7.684	7.683	7.672	7.358	6.681	5.744
목표수익률(0.40%)							
0.05th	8.531	1.554	1.552	1.518	1.330	1.137	0.737
0.1th	9.382	1.945	1.940	1.915	1.689	1.415	1.050
0.25th	19.523	3.381	3.375	3.353	3.166	2.670	1.866
0.5th	22.856	4.934	4.919	4.854	4.421	3.924	2.814
0.75th	25.317	6.435	6.438	6.387	5.981	5.412	4.366
0.9th	27.181	7.499	7.523	7.475	7.070	6.524	5.467
0.95th	28.020	8.271	8.243	8.191	7.698	7.128	6.309
목표수익률(0.50%)							
0.05th	10.737	2.424	2.411	2.460	2.228	1.785	1.144
0.1th	18.768	3.081	3.064	3.058	2.662	2.292	1.543
0.25th	21.540	4.055	4.045	3.994	3.702	3.216	2.323
0.5th	23.472	5.271	5.242	5.209	4.808	4.247	3.178
0.75th	25.750	6.685	6.670	6.602	6.235	5.700	4.625
0.9th	27.350	7.776	7.756	7.672	7.230	6.666	5.624
0.95th	28.408	8.558	8.534	8.388	7.878	7.370	6.497

<표 1> 자산별 차분 수익률의 기초통계

(단위: %)

	KOSPI	환율(won/$)	국고채(3년만기)
평균	0.375	-0.078	0.006
median	0.802	-0.078	0.015
최대값	8.944	3.350	1.078
최소값	-10.997	-3.933	-1.082
표준편차	2.829	0.896	0.304

<표 2> 수익률 간의 공분산

	KOSPI	환율(won/$)	국고채(3년만기)
KOSPI	8.003	-0.684	-0.065
환율(won/$)		0.802	0.003
국고채(3년만기)			0.092

<표 3> 신뢰수준 95%에서 최적자산배분 비율

(단위: 목표수익률, SRM, Expected Shortfall: %, 자산배분비율: 소수점)

목표수익률		0.20			0.30			0.40	
(SRM estimates)		(0.827)			(1.423)			(1.998)	
R=0.01	0.613	0.387	0.000	0.833	0.167	0.000	1.000	0.000	0.000
		(0.828)			(1.425)			(1.999)	
R=0.5	0.613	0.387	0.000	0.833	0.167	0.000	1.000	0.000	0.000
		(0.829)			(1.427)			(1.999)	
R=1	0.613	0.387	0.000	0.833	0.167	0.000	1.000	0.000	0.000
		(0.838)			(1.440)			(2.003)	
R=5	0.613	0.387	0.000	0.833	0.167	0.000	1.000	0.000	0.000
		(0.847)			(1.452)			(2.003)	
R=10	0.613	0.387	0.000	0.833	0.167	0.000	1.000	0.000	0.000
		(0.861)			(1.464)			(1.978)	
R=25	0.613	0.387	0.000	0.833	0.167	0.000	1.000	0.000	0.000
Expected Shortfall		(3.337)			(5.069)			(6.388)	
	0.526	0.000	0.474	0.796	0.000	0.204	1.000	0.000	0.000

<표 4> 자산수익률 간 VAR(2) 모형추정계수 및 t값

$$r_{j,t} = a_{0,j} + a_{1,j} \times r_{KOSPI,t-1} + a_{2,j} \times r_{KOSPI,t-2} + a_{3,j} \times r_{환율,t-1} + a_{4,j} \times r_{환율,t-2} + a_{5,j} \times r_{국고채,t-1} + a_{6,j} \times r_{국고채,t-2}$$

j = KOSPI, 환율, 국고채

	추정계수	t값
a0_KOSPI	-0.402	-1.768
a1_KOSPI	-0.660	-9.576
a2_KOSPI	0.219	0.956
a3_KOSPI	-0.665	-1.067
a4_KOSPI	-0.308	-4.467
a5_KOSPI	0.345	1.566
a6_KOSPI	-0.381	-0.598
a0_환율	0.090	1.227
a1_환율	-0.031	-1.379
a2_환율	-0.655	-8.912
a3_환율	-0.020	-0.102
a4_환율	-0.025	-1.138
a5_환율	-0.278	-3.926
a6_환율	0.106	0.517
a0_국고채	-0.003	-0.125
a1_국고채	0.007	0.996
a2_국고채	-0.024	-0.989
a3_국고채	-0.638	-9.768
a4_국고채	0.010	1.328
a5_국고채	-0.039	-1.672
a6_국고채	-0.339	-5.069

<표 5> 신뢰수준 95%에서 최적 자산배분 비율(시뮬레이션 결과의 평균치)

(단위: 목표수익률, SRM, Expected Shortfall: %, 자산배분비율: 소수점)

목표수익률	0.3%		0.4%		0.5%	
	ES	R=0.01	ES	R=0.01	ES	R=0.01
KOSPI	0.536	0.615	0.800	0.832	0.928	0.941
WON/$	0.088	0.080	0.030	0.026	0.008	0.006
GOV'T	0.375	0.305	0.170	0.142	0.064	0.053

<표 6> ES vs SRM의 R=0.01인 경우의 자산분포의 차이

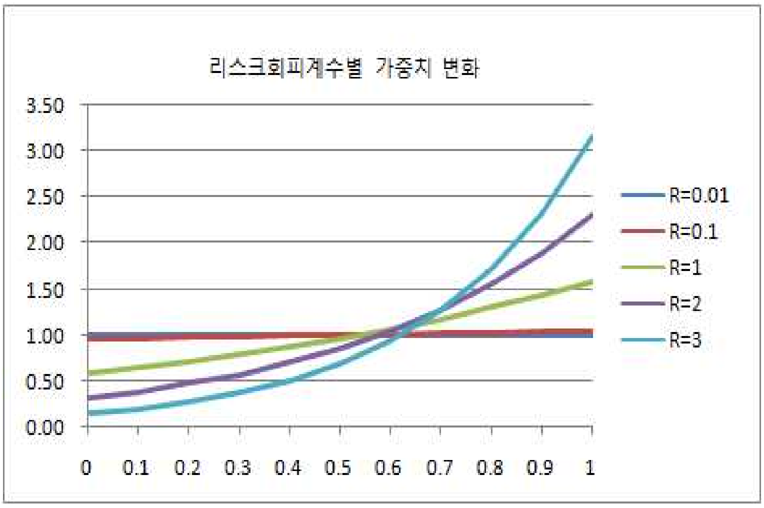
	평균	표준편차	upper bound	lower bound
KOSPI	-0.079	0.265	1.000	-1.000
WON/$	0.008	0.029	0.180	-0.050
GOV'T	0.070	0.246	0.972	-0.956

<표 7> 신뢰수준 95%에서 최적 자산배분 비율(시뮬레이션 결과의 평균치)

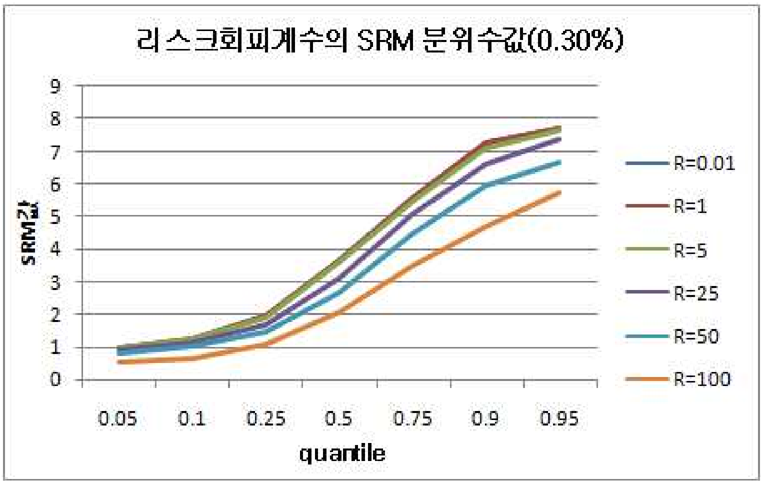
(단위: 목표수익률, SRM: %, 자산배분비율: 소수점)

목표수익률	0.30			0.40			0.50		
(SRM estimates)		(3.937)			(4.918)			(5.402)	
R=0.01	0.615	0.080	0.305	0.832	0.026	0.142	0.941	0.006	0.053
		(3.927)			(4.914)			(5.379)	
R=1	0.615	0.080	0.305	0.834	0.026	0.140	0.939	0.006	0.055
		(3.836)			(4.864)			(5.324)	
R=5	0.600	0.082	0.318	0.836	0.026	0.138	0.941	0.006	0.053
		(3.515)			(4.512)			(4.945)	
R=25	0.571	0.085	0.344	0.818	0.028	0.154	0.930	0.007	0.063
		(3.143)			(4.032)			(4.455)	
R=50	0.551	0.086	0.362	0.805	0.029	0.166	0.925	0.008	0.068
		(2.457)			(3.165)			(3.499)	
R=100	0.565	0.085	0.350	0.801	0.030	0.169	0.925	0.007	0.068

[그림 1] SRM 모형에서 리스크회피계수별 가중치 변화

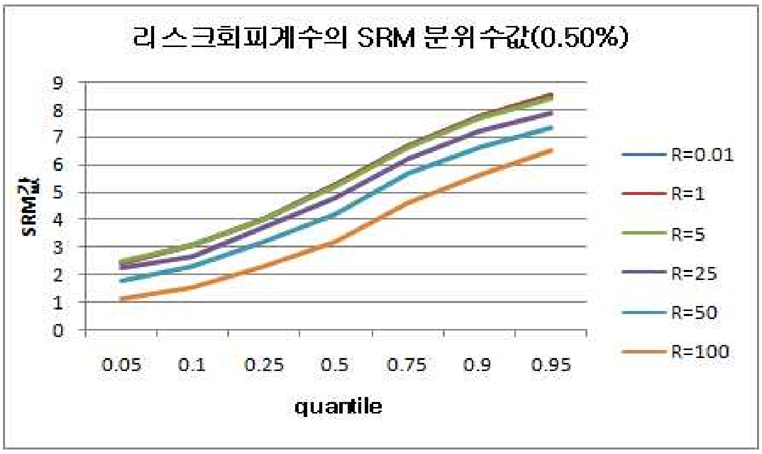


[그림 2] 목표수익률(0.3%)하에서 SRM 분위수 값



[그림 3] 목표수익률(0.4%)하에서 SRM 분위수 값

[그림 4] 목표수익률(0.50%)하에서 SRM 분위수 값



[그림 5] 목표수익률별 SRM값의 변화