JETEM

Journal of Economic Theory and Econometrics

The Journal of the Korean Econometric Society

(계 량 경 제 학 보)

March 2010

Volume 21. Issue 1. pp. 68-82

A Note on the Second-order Approximation of Hicksian Welfare Change Indicators*

Ki-Hong Choi†

Abstract In 1930-1940, Hicks defined the welfare change indicators such as the equivalent variation and the compensating variation using the expenditure function and provided their approximation formular using the Taylor expansion. The famous Harberger's welfare indicator is a second order approximation of the Hicksian welfare change indicators. Weitzman(1988) showed that a refinement is needed for the Harberger's welfare indicator based on the modern microeconomic theory. Also Diewert(1992) extended Weitzman's result by providing two refined formular. This note claims that conventional second order Taylor approximation is not a good method in case of the expenditure function as seen from the standard numerical analysis theory. This note derives four kinds of welfare change indicators in succinct way using a variant of Taylor second order approximation. The two among the four are the same with Diewert's formulas.

Keywords Expenditure function, Welfare change indicator, Second-order approximation

JEL Classification D11,D12

* I wish to thank to an anonymous referee and Shin,Sungwhee for their useful comments.

† Research Fellow, National Pension Research Institute, National Pension Service,

Email address: khchoi@nps.or.kr

Received August 13, 2009, Accepted November 05, 2009

JETEM

Journal of Economic Theory and Econometrics

The Journal of the Korean Econometric Society

(계 량 경 제 학 보)

March 2010

Volume 21. Issue 1. pp.68-82

Hicks 후생지표의 이차근사식에 관한 소고*

최기홍†

Abstract 1930-40년대 Hicks는 동등변화(equivalent variation)와 보상변화(compensating variation)라는 지출함수에 기초한 후생지표를 정의하고 Taylor 전개에 의한 근사식들을 제시하였다. 유명한 Harberger 후생지표는 Hicks 후생지표의 Taylor 이차근사식이다. Weitzman(1988)은 현대 미시경제 이론에 기초하여 Harberger 후생지표에는 보정이 필요함을 보였다. 이어서 Diewert(1992)는 Weitzman의 결과를 확장하여 두 가지 보정된 이차근사식을 제시하였다. 본고는 수치해석의 표준적 방법론에 따르면 통상적인 Taylor 이차근사식이 지출함수의 경우에는 적절하지 않음을 지적하고 그 변형을 사용한 간명한 방법으로 모두 네 가지 형태의 후생지표를 유도한다. 그 중 두 가지는 Diewert의 결과와 동일하다.

Keywords 지출함수, 후생지표, 이차근사식

JEL Classification D11,D12

* 익명의 심사자와 신성휘교수의 유익한 논평과 자문에 감사드립니다.

† 국민연금공단 국민연금연구원, 연구위원, 이메일 주소: khchoi@nps.or.kr

접수일(2009년 8월 13일), 게재확정일(2009년 11월 05일)

1. 서 론

1930－40년대 Hicks는 동등변화(equivalent variation)와 보상변화(compensating variation)라는 지출함수에 기초한 후생지표들을 정의하고 Taylor 전개에 의한 이산근사식들을 제시하였다. Hicks의 후생지표는 1900년대 초 Irving Fisher, Ragnar Frisch 등 초기 계량경제 학자들의 연구 주제였던 지수이론(index number theory)과 밀접한 관련성을 갖는다. Hicks의 후생지표와 지수이론과의 대응 관계는 Deaton and Muellbauer(1980, Chapter VII)에 잘 소개되고 있으며 결론적으로 차이와 비율의 관계에 불과하다.

Diewert(1992, 2006), Balk et al. (2004, 2008) 등은 Hicks의 후생지표와 같이 변화를 차이로 측정하는 경우 지표(indicator)로, 비율로 측정하는 경우를 지수(index)로 칭하고 있다. Diewert는 1992년 논문의 제목을 'Exact and superlative welfare change indicators'로 지수이론에서 고전적인 자신의 1976년 논문 제목 'Exact and superlative index numbers'과 유사하게 지어서 대칭성을 암시하고 있다. 여기서“superlative"는 지수이론의 맥락에서 Diewert(1976a)가 정의한 용어다. 최근 Barnett and Choi(2008)는 superlative를 평이하게 이차근사식으로 해석하는 것이 더 유용함을 보였다. 그러므로 앞서 언급된 Diewert의 1992년 연구는 지출함수에 의해서 정의되는 지수 및 후생지표에 대한 이차근사식에 관한 연구이다.

수학에서 함수의 근사식은 Taylor 전개를 기본으로 한다. 그러나 본고는 경제학의 지출함수의 경우 Taylor 이차근사식을 사용하는 대신 어떤 변형된 이차근사식을 사용하는 것이 이론적으로 바람직한 간명한 방법이라는 것을 보이고자 한다. 본고는 이러한 생각을 Hicks 후생지표의 이차근사식을 유도하는데 적용한다. 또한 Hicks 후생지표의 이차근사식을 변형된 이차근사식으로부터 직접 유도하는 방법 외에도 아래에 소개되는 항등식으로 부터 구하는 간접적 방법도 동시에 시도하고 있다. 직접법의 두 가지 결과는 Diewert(1992)와 동일하지만 유도과정은 훨씬 간명하다. 이러한 직, 간접 두 가지 유도방법 간에는 대칭성이 잘 드러난다.

한편, Diewert(1992, p.567)가 언급하였듯이 기존 문헌들의 Hicks의 후생지표와 관련된 용어들에는 많은 혼란이 있었다.[1] 먼저 본고는 Hicks의 항등식과 Konüs의 항등식이라고 이름 지은 두개의 항등식을 통해 앞서 강조된 지수이론과 Hicks 후생지표 간의 대칭성을 보이고 동시에 본고의 연구 대상인 Hicks의 후생지표를 명확히 정의하는 것으로부터 시작한다. 러시아의 경제학자 Konüs는 1920년대 경제학적 지수이론에 중요한 연구

1) "...these alternative definitions have caused a considerable amount of confusion in the literature over the past forty-five years."

를 발표하였다. 1939년에 Econometrica에 번역되어 소개된 그의 연구는 Hicks의 후생지표를 선행한 것으로 보이고 Samuelson의 현시선호(revealed preference) 이론에도 영향을 미쳤던 것으로 알려지고 있다.

본고는 두 개의 항등식으로 구성된 다음 식 (1)을 Hicks의 항등식으로 정의한다. 식들에서 $e(p^t, u^t)$는 지출함수이며 u^t와 p^t는 각각 t시점의 효용 수준과 가격 벡터를 나타낸다. 상첨자 t=1은 비교시점, t=0은 기준시점을 나타낸다. 식들에서 우변 [ ] 안은 가격이 변동하는 부분인데, Hicks 소비자잉여로 정의한다. { } 안은 효용수준이 변화하는 부분으로 후생지표(welfare change indicator)로 정의한다. 항등식 (1e)는 동등변화 후생지표와 소비자잉여를 각각 정의하며 항등식 (1c)는 보상변화 후생지표와 소비자잉여를 각각 정의한다.

$$e(p^1,u^1)-e(p^0,u^0)=\left[e(p^1,u^1)-e(p^0,u^1)\right]+\left\{e(p^0,u^1)-e(p^0,u^0)\right\} \tag{1e}$$

$$e(p^1,u^1)-e(p^0,u^0)=\left\{e(p^1,u^1)-e(p^1,u^0)\right\}+\left[e(p^1,u^0)-e(p^0,u^0)\right] \tag{1c}$$

참고로 다음 두 개의 항등식 (2)는 식 (1)의 항등식들에서 차이를 비율로 바꾼 것임을 알 수 있다. 본고는 이를 Konüs의 항등식이라고 정의한다. 앞서 식 (1)의 가격이 변하는 부분을 소비자잉여라고 했는데 지수이론에서는 가격이 변하는 부분을 Konüs 가격지수라고 한다, 유사하게 후생지표에 해당하는 부분을 Konüs 수량지수라고 한다. Samuelson and Swamy(1974)는 Konüs 가격 및 수량 지수를 경제학적 지수의 이론적 기본 모형으로 보았다, 지수이론의 선구자 Fisher(1921)는 항등식 (2)를 매우 중시하여 이 항등식을 만족시킨다는 점에서 Fisher지수를 이상(ideal)지수라고 하였다.

$$\frac{e(p^1,u^1)}{e(p^0,u^0)}=\frac{e(p^1,u^1)}{e(p^0,u^1)}\times\frac{e(p^0,u^1)}{e(p^0,u^0)} \tag{2e}$$

$$\frac{e(p^1,u^1)}{e(p^0,u^0)}=\frac{e(p^1,u^1)}{e(p^1,u^0)}\times\frac{e(p^1,u^0)}{e(p^0,u^0)} \tag{2c}$$

앞서 항등식 (1)에 의하면 소비자잉여는 일종의 간접적 후생지표로 볼 수 있다. 그것은 소비자잉여가 주어지면 항등식으로부터 대응되는 후생지표를 구할 수 있기 때문이다. 이는 Diewert(1976a)를 따른 것으로 그는 항등식 (2)에서 수량지수로부터 암묵적(implicit) 가격지수를 정의하였다. 또한 역으로 가격지수로부터 암묵적 수량지수를 정의할 수 있다.

식 (1)과 (2)로부터 정의되는 이론적 후생지표 및 지수산식은 현실 데이터에 적용하

기 위한 근사식이 필요하다. 현실에서 사용되는 지수산식들은 Konüs 지수의 근사식으로 볼 수 있다. Lapeyres지수, Paasche지수는 일차근사식이며, Fisher지수, Törnqvist지수는 Konüs 지수의 이차근사식임은 잘 알려져 있다. 앞서 언급되었듯이 지수이론에서는 이차근사식을 superlative하다고 한다.

본고의 목적은 식 (1e), (1c)에서 { } 안의 동등변화, 보상변화 두 가지 Hicks 후생지표의 이차근사식을 구하는 것이다. 방법론에서 기존 연구들과의 차별성은 첫째, Taylor전개의 변형인 이차근사정리(quadratic approximation lemma)를 선택한 것이다. 둘째, 직접 { }안 후생지표의 이차근사식을 구하는 방법과 먼저 [ ] 안의 소비자잉여의 이산근사식을 구하고 식 (1e), (1c)로부터 후생지표를 구하는 간접적 방법을 일관된 방법으로 시도한 것이다.[2)]

다음 Ⅱ절에서는 Hicks가 제시하였던 Taylor 전개에 의한 후생지표의 일차, 이차근사식 도출을 소개하고, Diewert의 Hicks의 이차근사식에 대한 비판을 소개한다. 그리고 Weitzman(1988)과 Diewert(1992,2006)의 새로운 이차근사식을 소개한다. 그리고 다음 Ⅲ절에서는 이차근사정리에 기초한 Hicks 후생지표의 새로운 유도가 제시된다. 그리고 마지막 Ⅳ절에는 요약 및 한계점이 제시된다.

2. 후생지표의 Taylor 근사식

2.1. Hicks의 접근법

Hicks(1941−42)에 의하면 다음과 같이 Taylor 일차전개에 의하여 후생지표의 일차근사식을 구할 수 있다. 각각에는 Shephard lemma와 균형점에 대한 Hicks의 보상 수요와 Marshall의 시장 수요 간의 항등식 $h(p^t,u^t)\equiv x(p^t,e(p^t,u^t))\equiv x^t$이 이용되었다. 식에서 ∇_p는 가격벡터에 대한 편도함수의 벡터, 중점(·)은 내적, 그리고 O_n은 Taylor 전개 잔여항의 (x^1-x^0)에 대한 최대 차수를 각각 나타낸다.

$$e(p^0,u^1)-e(p^0,u^0)=\left[e(p^1,u^1)+\nabla_p e(p^1,u^1)\cdot(p^0-p^1)+O_2\right]-e(p^0,u^0) \qquad (3a)$$
$$=x^1\cdot p^1+h(p^1,u^1)\cdot(p^0-p^1)-x^0\cdot p^0+O_2$$
$$=x^1\cdot p^1+x^1\cdot(p^0-p^1)-x^0\cdot p^0+O_2=p^0\cdot(x^1-x^0)+O_2$$

2) 역으로 소비자잉여의 이차근사식도 대칭적으로 네 가지이지만 반복이므로 생략한다.

$$e(p^1,u^1)-e(p^1,u^0)= e(p^1,u^1)-\left[e(p^0,u^0)+\nabla_p e(p^0,u^0)\cdot(p^1-p^0)+O_2\right] \qquad (3b)$$
$$= x^1\cdot p^1 - x^0\cdot p^0 - h(p^0,u^0)\cdot(p^1-p^0)+O_2$$
$$= x^1\cdot p^1 - x^0\cdot p^0 - x^0\cdot(p^1-p^0)+O_2 = p^1\cdot(x^1-x^0)+O_2$$

참고로 식 (3a)는 Laspeyres 수량지수의 차이 형태이며, 또한 식 (3b)는 Paasche 수량지수의 차이 형태임을 알 수 있다. 이 두식에 대해서는 다음과 같은 잘 알려진 지출함수의 부등식 관계가 성립한다. 그러므로 (3a)의 근사식은 과대 추정, (3b)는 과소 추정이라고 한다.

$$e(p^0,u^1)-e(p^0,u^0) \le p^0\cdot(x^1-x^0) \qquad (4a)$$
$$e(p^1,u^1)-e(p^1,u^0) \ge p^1\cdot(x^1-x^0) \qquad (4b)$$

다음으로 Hicks의 Taylor 이차전개에 의한 이차근사식에 대해 보기로 한다. 유도 과정의 수식 전개는 다소 길고 복잡하지만 일차전개와 동일하므로 결과만 나타내면 다음 식 (5)와 같다. 식들에서 $S^0=\nabla^2_{pp}e(p^0,u^0)$, $S^1=\nabla^2_{pp}e(p^1,u^1)$는 각각 지출함수의 Hessian(또는 Slutsky 대체행렬)이다.

$$e(p^0,u^1)-e(p^0,u^0)= p^0\cdot(x^1-x^0)+\frac{1}{2}(p^1-p^0)^T S^0(p^1-p^0)+O_3 \qquad (5a)$$
$$e(p^1,u^1)-e(p^1,u^0)= p^1\cdot(x^1-x^0)-\frac{1}{2}(p^1-p^0)^T S^1(p^1-p^0)+O_3 \qquad (5b)$$

만일 식 (5a)와 식 (5b)에서 우변 이차항들의 값들이 유사하다면, 즉, $S_0 \simeq S_1$ 이라면 두 식을 산술평균하면 이차항들은 상쇄되어 다음과 같이 Hicks 후생지표의 이차근사식으로 Harberger의 사다리꼴 후생지표를 얻을 수 있다. 본고는 다음의 후생지표를 Hicks-Harberger(H-H) 후생지표라고 부르기로 한다. 다음 식에서 좌변은 보상변화와 동등변화의 산술평균이며 p^1과 p^0의 사이에 존재하는 어떤 가격 벡터 p^*를 기준가격으로 하는 화폐단위로 계산된 효용 값의 차이 $e(p^*,u^1)-e(p^*,u^0)$로 생각할 수 있다.

$$\frac{\left[e(p^1,u^1)-e(p^1,u^0)\right]+\left[e(p^0,u^1)-e(p^0,u^0)\right]}{2}=\frac{1}{2}(p^0+p^1)\cdot(x^1-x^0)+O_3 \qquad (6)$$

2.2 Weitzman-Diewert의 이차근사식

Diewert(1976b,1992)는 Hicks 후생지표에 대한 Taylor 이차근사식, Hicks-Harberger(H-H) 후생지표에 대해 두 가지 방향으로 문제를 제기하였다. 첫째, Diewert(1976b)는 H-H 후생지표가 후생변화의 측정에 있어 시현된 선호(revealed preference) 측면에서 정교하지 못함을 지적하고 가격을 총지출에 의하여 정규화하는 대안을 제안하였다. 둘째, Diewert(1992)는 수치적 측면에서 앞서 Slutsky 대체행렬 S^0, S^1이 가격 벡터 p^0, p^1에 대해 -1차 동차(homogeneous)이므로[3] 앞서 $S_0 \simeq S_1$라는 근사관계는 성립하지 않으므로 식 (5)로부터 식 (6)을 도출하는 것에 대해 의문을 제기하였다.

Weitzman(1988)은 H-H 후생지표를 현대 미시경제 이론으로부터 엄밀하게 유도하고자 하였다. 그는 먼저 Hicks 후생지표에 대한 Taylor 이차근사식의 일반적 형태를 유도하였으나 라그랑지 승수를 포함하는 등 유용한 형태는 아니다. 그는 이어서 동조성(homotheticity)의 가정을 추가할 경우 H-H 후생지표와 유사하지만 조금 다른 다음과 같은 Hicks 후생지표의 이차근사식 형태를 유도할 수 있음을 보였다. 다음에서 P^L은 Laspeyres 물가지수이다.

$$e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = \frac{1}{2}(p^0 + p^1/P^L)\cdot(x^1 - x^0) + O_3 \tag{7}$$

이는 Diewert(1976b)의 주장과 같은 선상에 있다고 보아서, Diewert(1992,2006)는 Weitzman의 접근법을 확장하여 두 가지 형태로 후생지표를 유도하였다. 그는 Weitzman을 따라 동조성을 기본 가정으로 하고 다소 복잡하고 교묘한 방법을 통하여 Weitzman과 유사하지만 조금 다른 결과를 얻었다. 그는 위에서 Laspeyres 물가지수 P^L 대신 Paasche 물가지수 P^P를 놓는 결과를 얻었다. 그러나 Diewert는 자신과 Weitzman의 결과가 Hicks 후생지표에 대한 올바른 이차근사식임을 확신하지는 못하고 있다.[4] 본고는 이러한 Weitzman-Diewert의 접근법을 개선하고 그것들이 Hicks 후생지표의 이차근사식임을 보이고자 한다.

---

3) 지출함수는 가격에 대해 일차동차이므로 일계 미분한 보상수요는 가격에 대한 0차 동차함수, 그리고 이계 미분한 대체행렬은 가격에 대한 -1차 동차함수이다.

4) Diewert (1992, p.571), "The procedure does not seem to lead to an overall second-order approximation. Similarly Weitzman[1988, 550] approximates key terms in his second-order approximation by means of a first-order approximation."

3. 새로운 이산근사식의 도출

여기서는 Taylor 이차전개의 변형인 이차근사정리(quadratic approximation lemma)를 소개하고 경제학에서 이 정리가 왜 유용한지를 수치해석(numerical analysis)의 이론을 통하여 설명한다. 그 다음으로 후생지표의 이차근사식을 직접 유도하는 직접법과 먼저 소비자잉여의 이차근사식을 구하고 이로부터 후생지표의 이차근사식을 구하는 간접법을 제시한다.

3.1 지출함수와 이차근사정리

이차근사정리는 다음 식 (8)과 같이 제시된다. 다음 식들에서 ∇_x는 벡터 x에 대한 “gradient" 즉 편미분 벡터를 나타낸다. 주목할 것은 이차근사정리에는 일차 도함수들만 사용되는데 오차 항은 O_3 즉 $h \equiv x_1 - x_0$의 삼차 이상의 잔여 항인 점이다. 이차근사 식에는 이차 도함수가 반드시 필요하다는 것은 익숙한 Taylor 전개로 부터 갖게 되는 선입견이다. 그 증명은 식 (9)에서 제시된다.

이차근사정리(quadratic approximation lemma)

$$f(x^1) - f(x^0) = 0.5\left[\nabla_x f(x^1) + \nabla_x f(x^0)\right]^T h + O_3 \tag{8}$$

(증명)

$$\begin{aligned} & 0.5\left[\nabla_x f(x^1) + \nabla_x f(x^0)\right]^T h \\ &= 0.5\,\nabla_x f(x^0)^T h + 0.5\,\nabla_x f(x^1)^T h \\ &= 0.5\,\nabla_x f(x^0)^T h + 0.5\left[\nabla_x f(x^0)^T + h^T \nabla_{xx} f(x^0) + O_2\right] h \\ &= \nabla_x f(x^0)^T h + 0.5\, h^T \nabla_{xx} f(x^0) h + O_3 \end{aligned} \tag{9}$$

Balk(1995)는 이차근사정리가 Sten Malmquist에 의하여 1950년대 지출함수의 이차근사식 도출에 사용되었으며 Ragnar Frish에 의해서 1930년대 후생측정과 관련된 Double expenditure 방법에 사용된 점을 지적하였다. 최근 들어 이차근사정리가 사용된 대표적 사례는 Diewert(1976a)가 생산성 측정에 사용되는 Törnqvist 지수산식을 이차근사정리를 이용하여 초월대수(translog) 함수로부터 유도한 것이다. Törnqvist 산식을 경제학에 널리 소개한 Theil은 역시 Törnqvist 산식과 수요함수이론(Theil, 1975-76)에 이차근사정리를

중요하게 사용하고 있다.

이들 과거 경제학에서의 적용 사례들을 보면 이차근사정리는 대체로 지출함수와 함께 사용된다는 것을 볼 수 있다. 그 이유는 무엇일까? 지출함수의 일계도함수, 즉 Shephard 정리에 따르면 Hicks의 수요함수가 도출된다. 그런데 쌍대 항등식 $h_i(p,u^0) \equiv x_i(p,e(p,u^0))$ 을 보면 지출함수의 일계도함수 속에 지출함수 자신이 들어있다는 것에 주목이 필요하다.

수치해석(numerical analysis)에는 자연과학 및 공학에 널리 사용되는 다음과 같은 상미분방정식(상미방) 초기치 문제(Ordinary Differential Equation with Initial Value Problem)가 있다. 경제학 문헌에는 Judd(1995)에 소개되고 있다.

$$y'(t) = f(y(t),t),\ y(0) = y_0$$

앞서 Shephard 정리는 지출함수의 일계도함수가 자신을 포함한다고 하였다. 그러므로 지출함수는 상미방 초기치 문제로 정식화될 수 있다. 지출함수를 상미방 초기치 문제로 수치적으로 푸는 대표적 연구들에는 Vartia(1983), Hausman and Newey(1995) 등이 있으며 Poter-Hudak and Hayes(1986, 1991)은 Vartia의 방법에 측정된 후생지표의 신뢰구간을 추가하였다. 이들은 시장수요함수에 상미방 초기치 알고리듬을 적용하여 후생을 측정하는 방법을 제시하고 있다. 최기홍(2006)은 경제학에서 편미분 방정식으로 알려지고 있는 integrability equation(Varian, 1992)과 상미방과의 관련성을 보이고 있다.

상미방 초기치 문제에 대한 가장 기본적인 방법론은 Taylor 전개에 의한 방법이다. 그런데 Taylor 근사식의 정밀도를 높이기 위해서는 차수를 늘려야 하지만 일계도함수에 자신이 포함되는 상미방 초기치 문제의 대상 함수는 고계 도함수가 급속히 복잡해지는 문제점이 있다. 이러한 특성을 갖는 함수들에 대해 수치해석에서는 Taylor 전개 대신 그 변형들을 사용하는 것을 권장하며 그 한 유형이 본고의 이차근사정리인 것이다.[5)]

결론적으로 지출함수에 기초한 Hicks의 후생지표, 소비자잉여에의 이차 이상의 근사식을 도출하기 위해서는 Taylor 근사식은 바람직하지 않으며 어떤 적절한 변형이 바람직하다. 그것은 Diewert가 지적한 Hicks의 Taylor 이차근사식 접근법의 실패에서 볼 수 있다.

5) "The Taylor methods ⋯ have the desirable property of high order local truncation error, but the disadvantage of requiring the computation and evaluation of the derivatives of ⋯ so the Taylor methods are seldom used in practice(Burden and Faires, 1993, p.254)

3.2 화폐단위 효용함수와 두 가지 도함수

Hicks 후생지표는 지출함수, 구체적으로는 화폐단위 효용함수(money-metric utility)로서 정의될 수 있다. 본고는 화폐단위 효용함수를 $e(p^r, u(x))$로 나타낸다. 여기서 p^r은 기준(reference) 가격이다. 화폐단위 효용함수 $e(p^r, u(x))$는 효용함수 $u(x)$의 단조변환이어서 결국 $u(x)$ 효용함수와 동등하다. 화폐단위 효용함수는 보상함수(compensation function)라고도 한다.[6] 대표적 기준가격은 $r=0$, 즉 기준년도 가격 또는 $r=1$, 즉 비교연도 가격이다.

본고에서 이차근사정리를 사용한 직·간접 접근법에 의한 Hicks 후생지표의 도출을 위해서 화폐단위 효용함수에 대한 다음과 같은 두 종류의 도함수를 미리 유도해 둔다. 다음 두 결과는 Hillinger(2001, p.180)와 상이하지만 유도과정이 생략되어 판단은 유보한다.

$$\nabla_p e(p^r, u^t) = \{h_i(p^r, u^t)\} \quad ; \text{Shephard 정리} \tag{10}$$

$$= \{x_i(p^r, e(p^r, u^t))\} \quad ; \text{쌍대성의 항등식(Varian, p.126)} \tag{11}$$

$$= \left\{x_i(p^r, e(p^r, u^r))\frac{e(p^r, u^t)}{e(p^r, u^r)}\right\} \quad ; \text{동조성} \tag{12}$$

$$= \frac{e(p^r, u^t)}{e(p^r, u^r)}x^r \quad ; \text{벡터기호} \tag{13}$$

다음은 수량 x에 대한 도함수이다. 다음 식 (15)는 Weitzman(1988, p.548), Balk(1989,p.166)에서 사용된 바 있으며 $v(p,y)$는 간접효용 함수이며 $\partial v(p,y)/\partial y$는 Lagrange 승수이다.[Varian (1992, p108)]

$$\nabla_x e(p^r, u(x^t)) = \left\{\frac{\partial e(p^r, u^t)}{\partial u} \times \frac{\partial u(x^t)}{\partial x_i}\right\} \quad ; \text{chain rule} \tag{14}$$

$$= \left\{\frac{\partial e(p^r, u^t)}{\partial u} \times \frac{\partial v(p^t, y^t)}{\partial y} \times p_i^t\right\} \quad ; \text{최적화 일계조건} \tag{15}$$

$$= \{e(p^r, 1) \times v(p^t, 1) \times p_i^t\} \quad ; \text{동조성} \tag{16}$$

$$= \left\{\frac{e(p^r, u^t)}{e(p^t, u^t)} \times p_i^t\right\} \tag{17}$$

$$= \frac{e(p^r, u^t)}{e(p^t, u^t)} \cdot \ p^t \quad ; \text{벡터기호} \tag{18}$$

---

6) Varian, 1992, p.110

3.3 직접법

후생지표는 이차근사정리로 부터 직접 구할 수 있다. 항등식 (1e)의 동등변화 후생지표에 이차근사정리를 적용하면 다음과 같다. 다음 우변의 O_3는 x_1-x_0의 3차 이상의 항들이다.

$$e(p^0,u(x^1))-e(p^0,u(x^0))=0.5\left[\nabla_x e(p^0,u(x^1))+\nabla_x e(p^0,u(x^0))\right]^T(x^1-x^0)+O_3 \quad (19)$$

앞서 구해둔 편도함수의 식 (18)을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e(p^0,u(x^1))-e(p^0,u(x^0)) &= 0.5\left[\frac{e(p^0,u^1)}{e(p^1,u^1)}p^1+\frac{e(p^0,u^0)}{e(p^0,u^0)}p^0\right]^T(x^1-x^0)+O_3 \quad (20)\\ &= 0.5\left[\frac{e(p^0,u^1)}{p^1\cdot x^1}p^1+p^0\right]^T(x^1-x^0)+O_3 \end{aligned}$$

우변 마지막 식에는 관찰되지 않는 지출함수가 남아 있다. 이에 대해 Taylor 일차전개를 대입하면 O_2항이 중괄호 밖의 x_1-x_0와 곱해져서 O_3로 흡수되므로 변형된 이차근사 전개가 된다.[7] 최종적인 후생지표의 이산근사 형태는 가격지수 대신 Paasche 가격지수로 나눈(deflate) 형태이며 이는 Diewert(1992)의 결과와 동일하다.

$$\begin{aligned} e(p^0,u(x^1))-e(p^0,u(x^0)) &= 0.5\left[\frac{p^0\cdot x^0+p^0\cdot(x^1-x^0)+O_2}{p^1\cdot x^1}p^1+p^0\right]^T(x^1-x^0)+O_3 \quad (21a)\\ &= 0.5\left[\frac{p^0\cdot x^1}{p^1\cdot x^1}p^1+p^0\right]^T(x^1-x^0)+O_3\\ &= 0.5\left[\frac{1}{P^P}p^1+p^0\right]^T(x^1-x^0)+O_3 \end{aligned}$$

항등식 (1c)의 보상변화 후생지표에 이차근사정리를 적용하여 앞서와 같은 과정을 거치면 다음 (21b)의 식을 얻는다. 그러므로 직접법에 의하면 (a), (b) 두개의 식을 얻을 수

7) 최기홍(2006)에 소개된 상미방의 수치해석 방법 중 이차 Runge-Kutta 방법에 해당한다. (Judd, 1995, p.86)

있으며 두개의 식은 하나는 Paasche 가격지수로 비교연도 가격을 나눈(deflate) 형태, 그리고 나머지 하나는 기준연도 가격에 Laspeyres 가격지수를 곱한(inflate) 대칭적 형태를 갖는다.

$$e(p^1, u(x^1)) - e(p^1, u(x^0)) = 0.5\left[\ p^1 + p^0 \cdot P^L\right]^T (x^1 - x^0) + O_3 \tag{21b}$$

3.4 간접법

여기서 간접법은 먼저 소비자잉여의 이차근사식을 구한 다음 관련된 항등식 (1)로부터 대응되는 후생지표의 이차근사식을 구하는 이단계 접근법이다. 먼저 항등식 (1c)에서 정의된 소비자잉여에 대해 이차근사정리를 적용하면 다음과 같다. 다음의 우변 O_3는 $p_1 - p_0$의 삼차 이상의 항들이다.

$$e(p^1, u^0) - e(p^0, u^0) = 0.5\left[\nabla_p e(p^1, u^0) + \nabla_p e(p^0, u^0)\ \right]^T (p^1 - p^0) + O_3 \tag{22}$$

앞서 구한 식 (13)을 식 (22)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e(p^1, u^0) - e(p^0, u^0) &= 0.5\left[\ x^1 \frac{e(p^1, u^0)}{e(p^1, u^1)} + x^0 \frac{e(p^0, u^0)}{e(p^0, u^0)}\right]^T (p^1 - p^0) + O_3 \\ &= 0.5\left[\ x^1 \frac{e(p^1, u^0)}{p^1 \cdot x^1} + x^0\right]^T (p^1 - p^0) + O_3 \end{aligned} \tag{23}$$

위에서 우변 마지막 식에 다시 관찰되지 않는 지출함수가 남아 있다. 이에 대한 Taylor 일차전개를 대입하면 O_2항이 중괄호 밖의 $p_1 - p_0$와 곱해져서 밖의 O_3로 흡수된다. 다음 소비자잉여의 이산근사식은 Paasche 수량지수 Q^P로 비교시점 수량들을 나눈(deflate) 형태로 나타난다.

$$e(p^1, u^0) - e(p^0, u^0) = 0.5\left[x^1 \frac{p^0 \cdot x^0 + x^0 \cdot (p^1 - p^0) + O_2}{p^1 \cdot x^1} + x^0\right]^T (p^1 - p^0) + O_3 \qquad (24)$$

$$= 0.5\left[x^1 \frac{p^1 \cdot x^0}{p^1 \cdot x^1} + x^0\right]^T (p^1 - p^0) + O_3$$

$$= 0.5\left[x^1 \frac{1}{Q^P} + x^0\right]^T (p^1 - p^0) + O_3$$

구하는 후생지표의 이차근사식은 앞서 보상변화 분해의 항등식 (1c)에 위의 소비자잉여의 이차근사식 (24)을 대입하면 다음 식 (25a)와 같이 나타난다. 한편, 항등식 (1e)에서 정의된 소비자영여에 대해서도 대칭적인 방법에 의해서 유사한 결과를 얻을 수 있다. 그 결과는 식 (25b)와 같으며 Laspeyres 수량지수 Q^L로 곱한(inflate) 형태로 나타난다. 식 (25a)와 식 (25b)를 본고는 암묵적(implicit) 후생지표라고 이름한다.[8)]

$$e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) = e(p^1, u^1) - e(p^0, u^0) - \left[e(p^1, u^0) - e(p^0, u^0)\right] \qquad (25a)$$

$$= p^1 \cdot x^1 - p^0 \cdot x^0 - 0.5\left[x^1 \cdot \frac{1}{Q^P} + x^0\right]^T (p^1 - p^0) + O_3$$

$$e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1) - e(p^0, u^0) - \left[e(p^1, u^1) - e(p^0, u^1)\right] \qquad (25b)$$

$$= p^1 \cdot x^1 - p^0 \cdot x^0 - 0.5\left[x^1 + x^0 \cdot Q^L\right]^T (p^1 - p^0) + O_3$$

4. 요약 및 결론

본고는 먼저 Hicks 후생지표와 소비자잉여를 보상변화 분해와 동등변화 분해의 두 가지 항등식에 의하여 정의하는 것이 바람직함을 보였다. 그렇게 하는 것의 장점은 첫째, 기존 문헌들에서 발견되는 용어상의 혼란에 빠지지 않게 된다. 둘째, 항등식으로 정의되므로 소비자잉여를 산출하면 후생지표는 따라서 결정되며 역도 성립한다.

본고는 또한 후생지표와 소비자잉여의 이산근사식에 대한 간명한 유도방법을 제시하였다. 그 방법은 Taylor 이차 전개의 변형이라고 할 수 있는 이차근사정리(quadratic approximation lemma)에 의한 방법이다. 효용함수의 동조성에 대한 가정 하에 Diewert(1992)와 동일한 동등변화 후생지표의 이차근사식이 도출된다. 대칭적으로 동등변

8) Diewert(1976a)는 앞서 식 (2e)와 (2c)로 부터 암묵적 가격지수와 수량지수를 각각 정의하였다.

화 소비자잉여의 이차근사식이 도출되며 그로부터 간접적으로 암묵적(implicit) 후생지표가 도출될 수 있다.

그러므로 동등변화 후생지표에 대해 직·간접 2종류, 보상변화 후생지표에 대해 직·간접 2종류 모두 4종류의 후생지표에 대한 이차근사식을 구할 수 있다. 이를 요약하면 다음과 같으며 대칭성이 나타나고 있다.

$$e(p^0,u^1)-e(p^0,u^0)=\begin{cases}0.5\left[\ p^1\cdot\dfrac{1}{P^P}+p^0\right]\cdot(x^1-x^0)+O_3 & (\text{직접법})\\ p^1\cdot x^1-p^0\cdot x^0-0.5\left[\ x^1+x^0\cdot Q^L\right]\cdot(p^1-p^0)+O_3 & (\text{간접법})\end{cases}\quad(26e)$$

$$e(p^1,u^1)-e(p^1,u^0)=\begin{cases}0.5\left[\ p^1+p^0\cdot P^L\right]\cdot(x^1-x^0)+O_3 & (\text{직접법})\\ p^1\cdot x^1-p^0\cdot x^0-0.5\left[\ x^1\cdot\dfrac{1}{Q^P}+x^0\right]\cdot(p^1-p^0)+O_3 & (\text{간접법})\end{cases}\quad(26c)$$

이러한 연구에 의하면 재정학에서 유명한 Harberger 후생지표는 효용함수의 동조성 가정에 기초한다는 것을 알 수 있으며 또한 Harberger 후생지표에서 가격변수는 적절하게 물가지수로 실질화해서 사용해야 함을 의미한다.

본 연구는 다른 갈래의 연구들과 밀접한 관련이 있다. 그 것은 Vartia(1983), Hausman and Newey(1995), Poter-Hudak and Hayes(1986,1991), 최기홍(2006) 등이다. 이들 연구는 계량경제학적으로 추정된 수요함수가 있으면 Hicks의 소비자잉여를 임의의 정밀도로 수치적으로 계산할 수 있다는 것이다. 이 경우는 본고에서 제시된 접근법들의 한계점인 동조성이라는 강한 가정이 필요 없다는 것이 중요한 장점이다.

■ 참고문헌

최기홍, 2006, Hicks 소비자잉여와 계산 알고리즘, 계량경제학보, 17권 2호, 55-78

Balk, B,M, 2008, Price and Quantity Index Numbers: Models for Measuring Aggregate Change and Difference, Cambridge University Press

__________,1995, Approximation of cost-of-living index from demand functions: a Retrospect, Economics Letters, 147-155

Barnett, W.A., 1983, Definitions of 'second order approximations' and 'flexible functional form', Economics Letters, 31-35

___________, and K.H. Choi, 2008, Operational identification of the complete class of superlative index numbers: an application of Galois theory, Journal of Mathematical Economics, 44, 603-612

Burden and Faires, 1993, Numerical Analysis, PWS-KENT

Deaton, A. and J. Muellbauer,1980, Economics and Consumer Behavior, Cambridge University Press

Diewert, W.E. 2006, Chapter 6: Consumer surplus and the measurement of ex post welfare change, Cost-Benefit Analysis, UBC Dept. Economics, lecture note

____________, 1992, Exact and superlative welfare change indicators, Economic Inquiry, 565-582

_____________ 1976a, Exact and superlative index numbers, Journal of Econometrics, 115-145

_____________ 1976b, Harberger's welfare indicator and revealed preference theory, American Economic Review, March, 143-52

Hausman J.A. and W.K., 1995, Newey, Nonparametric Estimation of Exact Consumers Surplus and Deadweight Loss, Econometrica, 63(6), 1445-1476

Hicks, J.R. 1941-42, Consumer's surplus and index numbers, The Review of Economic Studies, 126-137

Hillinger,C. 2001, Money Metric, Consumer Surplus and Welfare Measurement,German Economic Review, 2(2), 177-193

Judd, Kenneth, 1995, Computational Economics, Cambridge University Press

Konüs, A.A., 1939, The Problem of the True Index of the Cost of Living,Econometrica, 7(1) 10-29

Porter-Hudak, S. and K. Hayes, 1986, The Statistical Precision of a Numerical Methods Estimator as Applied to Welfare Loss, Economics Letters, 20, 255-257

______________________________, 1991, Numerical Methods Approach to Calculating Cost of Living Indices, Journal of Econometrics, 50 91-105

Theil, Henri, 1975-76,, Theory and Measurement of Consumer Demand, 2 vol, North-Holland Publishing Company

Varian, H.R., 1992, Microeconomic Analysis 3rd. ed., Norton

Vartia, Y., 1983, Efficient Methods of Measuring Welfare Change and Compensated Income in Terms of Ordinary Demand Functions, Econometrica, 51(1) 79-98

Weitzman, M.L.,1988, Consumer's surplus as an exact approximation when prices are appropriately deflated, The Quarterly Journal of Economics, 543-553