JETEM

Journal of Economic Theory and Econometrics

The Journal of the Korean Econometric Society

(계 량 경 제 학 보)

December 2010

Volume 21. Issue 4. pp.20-46

Conditional Heteroskedasticity-Robust Testing for Cointegration *

Byeongseon Seo†

Abstract This paper considers conditional heteroskedasticity-robust testing for cointegration in nonstationary vector autoregressive models under conditional heteroskedasticity. The likelihood ratio (LR) cointegration tests of Johansen (1988, 1991) assume the Gaussian independent and identically distributed innovations, and hence the stylized facts of time-variant and persistent volatility may affect the performance of the tests. In this paper, we allow for conditionally heteroskedastic innovations and formulate the Wald test statistics. The asymptotic distribution of the Wald tests is shown to follow the nonstandard distribution. The simulation evidence regarding the performance of the proposed tests demonstrates robustness to persistent conditional volatility.

Keywords Cointegration, Conditional heteroskedasticity, Robustness, VAR, Volatility

JEL Classification C12, C32

* I am deeply indebted to Y.Y. Kim, B.S. Yoo, and seminar participants at the 2009 Summer Conference of the Korea Econometric Society for invaluable comments and suggestions. Special thanks are owed to anonymous referees for insightful comments and suggestions. This work was supported by the Korea Research Foundation Grant funded by the Korean Government (KRF-2007-B00089).

† Professor. Department of Food and Resource Economics, College of Life Science, Korea University, Email address: seomatteo@korea.ac.kr

Received July 21, 2010, Revised September 7, 2010, Accepted November 4, 2010

JETEM

Journal of Economic Theory and Econometrics

The Journal of the Korean Econometric Society

(계 량 경 제 학 보)

December 2010

Volume 21. Issue 4. pp.20-46

조건부 이분산성에 강건한 장기균형검정 *

서병선 †

Abstract 단위근을 갖는 비정상적 시계열로 구성된 벡터자기회귀모형에서 장기균형을 검정하기 위한 Johansen의 우도비 검정방법은 교란항의 독립동일 정규분포를 가정하므로 시계열의 일반적 특성인 조건부 이분산성을 고려하지 못한다. Johansen의 분포이론은 조건부 이분산성하에서도 성립하지만 실제 응용에서는 이분산성의 지속성이 증가할수록 검정 결과에 영향을 미치기 때문에 이론과 응용의 마찰이 발생한다. 본 연구는 조건부 이분산성을 허락하여 자료의 특성에 부합하는 장기균형 검정방법을 탐구한다. 새로운 장기균형 검정 방법은 Wald 검정통계량에 기초하며 우도비 검정통계량에서 고려하지 않은 이분산성을 허락하도록 한다. 새로운 검정통계량의 극한 분포는 비표준 분포를 따름을 보였다. 몬테카를로 모의 시행에서 검정 통계량의 적합성을 측정한 결과, 변동성의 지속성이 증가하여도 Wald 검정통계량은 강건함을 확인하였다.

Keywords 강건성, 벡터자기회귀모형, 장기균형검정, 조건부 이분산성, Wald 검정

JEL Classification C12, C32

* 김 윤영 교수, 유 병삼 교수, 두 분의 심사위원, 2009년 계량경제학회 학술대회 참석자들의 유익한 논평에 감사한다. 이 논문은 2007년도 정부재원(교육과학기술부 기초연구지원 인문사회 단독연구)으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2007-B00089).

† 고려대학교 생명과학대학 식품자원경제학과 교수, 이메일 주소: seomatteo@korea.ac.kr.

접수일*(2010*년 *7*월 *21*일*)*, 수정일 *(2010*년 *9*월 *7*일*)*, 게재확정일 *(2010*년 *11*월 *4*일*)*

1. 서론

단위근을 갖는 비정상적 시계열의 선형결합으로 정상성을 만족하는 장기균형관계는 Engle and Granger (1987)의 Vector Error Correction Model에 대한 연구에서 제시되었으며 이를 경제 이론 및 실증 분석에 적용하는 많은 연구가 있다. 안정적 균형관계를 가정하는 경제 이론과 모형에서 지속성을 갖는 경제 변수들이 정상적 관계를 형성하는지를 분석하는 것이 필요하고 이러한 수요에 대응하여 장기균형검정 방법들이 제시되었다. Johansen (1988, 1991)의 우도비 검정 통계량은 장기균형의 존재를 검정하는 중요한 방법으로 사용되고 있다. 우도비 검정 통계량은 교란항에 대하여 독립동일 정규분포를 가정한다. 그러나 시계열 경제자료는 변동성에 있어 시간에 따른 변동과 지속성을 갖는 조건부 이분산성을 보인다. 본 연구는 교란항에 조건부 이분산성을 허락하여 장기균형검정에 대한 새로운 검정 통계량을 제시하고 이에 대한 분포 이론을 밝히고자 한다. 또한 우도비 검정과의 비교를 통하여 적용 가능성을 측정하고자 한다.

장기균형검정은 단위근을 갖는 경제변수들이 형성하는 균형관계를 설명하기 위하여 경제 모형과 이론에서 적용되었다. 특히, Campbell and Shiller (1987)는 현재가치모형에 의한 이자율 기간구조의 장기균형관계를 밝히고 있으며, King, Plosser, Stock, and Watson (1991)은 균형성장가설에 의한 소비-소득, 투자-소득의 장기균형관계를 보인다. 이들 연구들은 장기균형의 존재를 밝히기 위하여 장기균형 검정방법을 사용하고 있다. 특히 Johansen (1988, 1991)의 우도비 검정 방법은 많은 연구에서 분석방법으로 사용되었는데 이는 독립동일 정규분포를 가정한 우도함수를 기초로 한다. 우도비 검정과 함께 Engle and Granger (1987)와 Engle and Yoo (1987)의 이단계 장기균형검정, Phillips and Ouliaris (1990)의 비정상적 시계열 회귀모형에서 잔차항에 대한 장기균형검정, Stock and Watson (1988)의 공동 확률적 추세 검정 등 많은 방법들이 있으며 이들이 비표준적 극한분포를 갖는 점에서는 우도비 검정과 공통점을 갖는다.

Johansen의 우도비 검정에 대한 적합성을 측정하기 위한 연구로 Cheung and Lai (1993), Toda (1995), Haug (1996)와 Lee and Tse (1996)의 연구를 들 수 있다. Cheung and Lai는 우도비 검정이 몬테카를로 분석을 통하여 VAR 변수의 수, 시차 차수, 분포의 가정에 의존함을 보인다. Toda는 교란항의 계열 상관과 충격과의 상관관계가 우도비 검정에 미치는 영향을 보이고 있으며, Lee and Tse는 조건부 이분산성을 허용할 때 우도비 검정의 민감도를 측정하고 있다. 또한 Lucas (1997)는 교란항의 분포가 정규분포가 아닌 경우 우도비 장기균형검정이 영향을 받을 수 있음을 보인다.

우도비 검정이 갖는 문제점을 해결하기 위한 방편으로 부트스트래핑을 활용하는 연구

가 있다. Johansen (2000)은 Bartlett 교정을 통한 부트스트래핑 장기균형검정을 제시하였고, Swensen (2006)은 독립동일 분포 하에서 부트스트래핑 검정을 연구하였다. 특히, Cavaliere, Rahbek, and Taylor (2010)는 조건부 이분산성 하에서 장기균형검정을 분석하고 있으며 와일드 부트스트래핑 방식을 제시하고 있다. 본 연구는 이들과 비교하여 부트스트래핑 방식이 아닌 장기균형검정의 새로운 검정 방식을 개발하여 이론과 실증 분석의 마찰을 해결하고자 한다.

경제 변수들이 지속성과 함께 시간에 변동하는 조건부 이분산성을 갖고 있다는 것은 많은 시계열자료의 특징이다. Engle (1982)과 Bollerslev (1986)의 GARCH 모형은 많은 경제 응용을 갖고 있다. 따라서 시계열 계량경제모형에서 조건부 이분산성을 고려하였다. Ling and Li (1998)와 Seo (1999)는 이분산성 하에서 단위근 검정통계량의 분포이론을 도출하였으며, Seo (2007)는 이분산성을 고려한 장기균형벡터의 추정을 연구하였다. 본 연구는 이들 연구와 달리 이분산성을 허락하지만 이분산성의 정보를 추정에서 활용하지 않으며, 조건부 이분산성에 강건한 장기균형검정을 연구하고자 한다.

독립동일 정규분포를 가정하는 우도비 검정과 비교하여 본 연구에서는 분포에 대한 가정을 현실에 근접하도록 조건부 이분산성을 허락하고 정규분포에 대한 가정을 완화한다. 자료의 특성에 부합하는 장기균형검정 방법을 찾기 위하여 본 연구는 Wald 검정통계량을 제시한다. 그리고 새로운 검정통계량의 극한 분포는 비표준적 분포를 따름을 보였다. 몬테카를로 모의 시행에서 검정 통계량의 적합성을 측정한 결과, Wald 검정통계량은 변동성의 지속성이 증가하여도 강건함을 확인하였다.

본 연구의 장기균형검정은 적재 행렬의 추정에서 비롯한다. Johansen의 우도비 검정은 VAR 평균 방정식에 기초하므로 조건부 이분산성을 고려하지 못한다. 만일 조건부 이분산성 구조를 알고 있다면 Seo (2007)에서와 같이 평균 방정식과 분산 방정식의 결합 추정을 통하여 적재 행렬의 효율적 추정이 가능하고 이는 장기균형검정의 검정력을 향상시킬 것이다. 하지만 조건부 이분산성 구조를 제대로 파악하기 어렵고 이로 인한 불확실성의 증가는 검정력에 부정적 영향을 미칠 수 있다. 이와 함께 이분산성 구조를 알고 있더라도 추정해야 하는 모수의 수가 변수의 수의 증가와 함께 급격히 증가하기 때문에 실제 적용에는 한계가 따른다. 또한 Li, Ling, and Wong (2001)에서 보인 바와 같이 ARCH 이분산성 구조에서 적재 행렬 추정량의 분포는 표준분포와 비표준분포의 선형결합이다. 따라서 이 결과는 장기균형검정이 새로운 분포를 따름을 의미하며 이에 대하여는 추가적인 연구가 필요하다. 따라서 본 연구에서는 평균 방정식에 기초하고, 조건부 이분산성에 일치하는 장기균형검정을 제시하고자 한다.

논문에서 사용하는 기호를 정리하면 다음과 같다. $\mathrm{tr}(A)$는 행렬 A의 대각 합을 뜻하며 $\mathrm{vec}(A)$는 벡터 연산이다. $[\cdot]$는 정수 연산을 뜻한다. 또한 $\to^p$는 확률적 수렴을 의미

하며 $z_{n,t}=o_p(1)$는 $z_{n,t}\xrightarrow{p}0$와 같다. 그리고 $\Rightarrow$는 불변 정리에 의한 분포 수렴을 의미한다. 그리고 $W(r)=BM(\Omega)$은 $W(r)$이 장기분산행렬 Ω를 갖는 브라운 운동임을 뜻한다.
본 논문은 다음과 같이 구성된다. 제2절에서는 벡터자기회귀모형과 장기균형의 존재를 검정하기 위한 검정통계량을 제시한다. 제3절은 장기균형 검정 통계량의 분포와 특성을 밝힌다. 제4절은 장기균형 차수검정으로 분석을 확장하고 이에 대한 분포이론을 도출한다. 제5절에서는 몬테카를로 모의시행을 통한 검정 통계량의 적합성을 측정하고 우도비 검정 방법과 비교를 통하여 적용 가능성을 탐색한다.

2. 모 형

단위근을 갖는 시계열 x_t는 p-차원 벡터이고 다음 벡터자기회귀모형을 따른다고 하자.

$$\Delta x_t=\Pi x_{t-1}+\sum_{i=1}^{k}\Gamma_i\Delta x_{t-i}+u_t \tag{1}$$

벡터자기회귀모형에서 Π는 $p\times p$ 적재 행렬이며, 계수 행렬 Γ_i 역시 $p\times p$ 행렬이다. 벡터자기회귀모형 (1)은 $\Pi(L)=(1-L)I-\Pi L-\sum_{i=1}^{k}\Gamma_i(1-L)L^i$을 사용하면 $\Pi(L)x_t=u_t$ 와 같다. 여기서 특성해 방정식 $|\Pi(L)|=0$의 모든 해는 단위원 밖에 있거나 단위원 위에 있다고 가정한다.

교란항 u_t는 정보 집합 $I_t=\sigma(x_t,x_{t-1},x_{t-2},...)$에 대하여 벡터 마팅게일 차분과정을 따른다고 가정한다. 따라서 Engle and Granger (1987)와 Johansen (1991)에서 취한 교란항의 독립동일분포 가정을 완화하고 조건부 이분산성을 허락한다.
장기균형관계는 단위근을 갖는 시계열로 구성된 선형결합이며 정상성을 만족한다. 만일 벡터자기회귀모형 (1)을 따르는 시계열 x_t에 장기균형관계가 존재하면 적재 행렬 Π ($\Pi=-\Pi(1)$)는 0과 다르다. 따라서 장기균형의 존재를 검정하기 위하여 귀무가설과 대립가설을 다음과 같이 세울 수 있다.

$$H_0:\Pi=0,\quad H_1:\Pi\neq 0.$$

Johansen (1991)의 우도비 검정은 정규분포를 가정한 최우추정방식에 기초하고 있다. Lucas (1997)는 정규분포 대신 t-분포를 가정하여 장기균형검정의 분포이론을 도출하고 있으며 분포에 대한 가정이 Johansen의 분포이론과 다른 결과를 유도함을 보인다. 본 연구에서는 정규분포에 대한 가정을 취하지 않고 검정 통계량이 최우추정방식이 아닌 최소자승추정에 기초하도록 한다. 특정한 분포를 가정하는 경우 이로 인하여 가정과 자료의 불일치 문제가 발생할 수 있기 때문에 특정 분포를 가정하지 않는 추정방법을 따르도록 한다.

모수 벡터 $\theta = \mathrm{vec}(\Pi, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k)$에 대하여 최소자승추정량 $\hat{\theta}$는 다음 목적함수를 최소화한다.

$$S_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t'(\theta)\, u_t(\theta)$$

여기서 $u_t(\theta)$는 벡터자기회귀모형 (1)의 u_t와 같다.

적재 행렬의 최소자승 추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\Pi} = S_{01} S_{11}^{-1} \tag{2}$$

여기서 $S_{01} = \sum_{t=1}^{n} R_{0t} R_{1t}'$, $S_{11} = \sum_{t=1}^{n} R_{1t} R_{1t}'$,

$R_{0t} = \Delta x_t - \sum_{t=1}^{n} \Delta x_t z_{t-1}' (\sum_{t=1}^{n} z_{t-1} z_{t-1}')^{-1} z_{t-1}$, $R_{1t} = x_{t-1} - \sum_{t=1}^{n} x_{t-1} z_{t-1}' (\sum_{t=1}^{n} z_{t-1} z_{t-1}')^{-1} z_{t-1}$,

$z_{t-1} = \mathrm{vec}(\Delta x_{t-1}, \Delta x_{t-2}, \ldots, \Delta x_{t-k})$이다.

따라서 적재 행렬에 대한 최소자승 추정량은 표본 자료에서 바로 구할 수 있다. 검정 통계량을 유도하기에 앞서 추정량 $\hat{\Pi}$의 특성을 살펴보면 강일치성을 충족한다. 또한 제3절에서 보이는 바와 같이 적재 행렬 추정량은 비표준적 분포를 따른다.

조건부 이분산성이 벡터자기회귀모형의 우도비 장기균형검정에 미치는 영향을 Lee and Tse (1996)와 Cavaliere, Rahbek, and Taylor (2010) 등에서 보이고 있다. Cavaliere, Rahbek, and Taylor (2010)에서는 이분산성을 교정하기 위하여 와일드 부트스트래핑 검정방법을 제안하고 있다. 와일드 부트스트래핑으로 이분산성을 통제할 수 있겠으나 아직 효율성에 대하여는 증명되지 않았다.

본 연구는 부트스트래핑 방식을 따르지 않으며 조건부 이분산성을 허락한 검정 통계량을 제시하고자 한다. 적재 행렬의 추정량을 기초로 검정 통계량 $Wald_n$을 다음과 같이

정의한다.

$$Wald_n \;=\; [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})]^{'}\; H_n^{-1}\; [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})]$$

(3)

여기서 $H_n = (I \otimes \frac{1}{n^2} S_{11})^{-1} \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} (\hat{u}_t \hat{u}_t^{'} \otimes R_{1t} R_{1t}^{'})(I \otimes \frac{1}{n^2} S_{11})^{-1}$이고 $\hat{u}_t = u_t(\hat{\theta})$이다.

검정 통계량 $Wald_n$는 최소자승 추정량 $\hat{\Pi}$와 조건부 이분산성에 대한 조정 행렬 H_n으로 구성된다. 조정 행렬 H_n은 자료와 최소자승추정 결과를 이용하여 계산되므로 검정 통계량을 쉽게 구할 수 있다. 그리고 분포이론을 구하기 위하여 표본 크기로 정규화 하였으나 표본 크기를 무시하여도 검정 통계량은 변함이 없다.

Johansen (1991)의 우도비 검정통계량은 정규분포 우도 함수의 극대화와 관련하는 특성해 방정식을 사용하여 계산하지만 검정 통계량 $Wald_n$은 적재 행렬에 대한 추정량에 기초한다. 그리고 Wald 검정 통계량은 독립동일분포의 가정을 완화하여 조건부 이분산성을 허락한다. 따라서 장기균형에 대한 Wald 검정 통계량은 우도비 검정 통계량을 일반화한다. Wald 검정과 우도비 검정의 계산 과정은 다르지만 이들이 밀접하게 관련되어 있음을 보일 수 있다. 만일 조건부 이분산성이 존재하지 않는다고 가정하면 Wald 검정 통계량은 이분산성에 대한 조정이 필요하지 않으므로 조정 행렬 H_n 대신 V_n을 사용하여 정의할 수 있다.

$$Wald_n^S \;=\; [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})]^{'}\; V_n^{-1}\; [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})]$$

(4)

여기서 $V_n = (\widehat{\Sigma^{-1}} \otimes \frac{1}{n^2} S_{11})^{-1}$이고 $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_t^{'}$이다.

검정 통계량 $Wald_n^S$ 에서는 등분산성을 가정하고 있다. 검정 통계량 $Wald_n^S$와 우도비 검정 통계량이 근사적으로 동일함은 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저 Johansen의 우도비 검정 통계량은 다음과 같이 정의된다.

$$LR_n = -n \sum_{i=1}^{p} \log(1 - \hat{\lambda}_i) \tag{5}$$

여기서 특성해 $\hat{\lambda}_i$ ($\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > ... > \hat{\lambda}_p$)는 다음 특성해 방정식을 만족한다.

$$|\hat{\lambda}S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}| = 0 \tag{6}$$

여기서 $S_{00} = \sum_{t=1}^{n} R_{0t}R_{0t}^{'}$, $S_{11} = \sum_{t=1}^{n} R_{1t}R_{1t}^{'}$, $S_{01} = \sum_{t=1}^{n} R_{0t}R_{1t}^{'}$, $S_{10} = \sum_{t=1}^{n} R_{1t}R_{0t}^{'}$.

식 (6)에서 $n\hat{\lambda} = O_p(1)$이고 $|\hat{\lambda}I - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}S_{11}^{-1}| = 0$ 이 성립하므로 로그 근사화를 적용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} LR_n &\approx n\sum_{i=1}^{p}\hat{\lambda}_i \\ &= \mathrm{tr}\,(nS_{00}^{-1}S_{01}S_{11}^{-1}S_{10}) \end{aligned} \tag{7}$$

검정 통계량 $Wald_n^S$ 은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} Wald_n^S &= [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})]^{'}\ (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \frac{1}{n^2}S_{11})\ [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})] \\ &= \mathrm{tr}\ (\hat{\Sigma}^{-1}S_{01}S_{11}^{-1}S_{10}) \end{aligned}$$

(8)

귀무가설 $H_0 : \Pi = 0$ 하에서 $\frac{1}{n}S_{00} \to^{p} \Sigma$ 이고 $\hat{\Sigma} \to^{p} \Sigma$ 이므로 두 검정 통계량 $Wald_n^S$와 LR_n은 점근적으로 동일하다. 따라서 검정통계량 $Wald_n^S$은 우도비 검정 통계량과 근사적으로 동일하다. 그리고 등분산성이 성립하면 이분산성을 허락한 검정 통계량 $Wald_n$은 등분산성을 가정한 $Wald_n^S$와 점근적으로 동일하기 때문에 우도비 검정 통계량과도 근사적으로 유사하다. 따라서 검정 통계량 $Wald_n$이 우도비 검정 통계량 LR_n과 차이를 보인다면 이는 교란항에 조건부 이분산성이 존재하기 때문에 조정이 이루어진 것으로 해석할 수 있다.

3. 분포 이론

우선 정보 집합 $I_t = \sigma(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, ...)$를 정의한다. 분포 이론을 얻기 위하여 다음 가정을 한다.

가정 1:

1.1 $E(u_t|I_{t-1})=0.$

1.2 $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}E(u_t u_t'|I_{t-1}) \to^{p} \Sigma > 0.$

1.3 어떤 q $(q>6)$에 대하여 $\sup_t E|u_t|^q < \infty$.

1.4 특성해 방정식 $|\Pi(L)|=0$ 을 만족하는 특성해는 모두 단위원 위에 또는 밖에 존재한다. 여기서, $\Pi(L)=(1-L)I-\Pi L-\sum_{i=1}^{k}\Gamma_i(1-L)L^i$.

가정 1.1에서 교란항 u_t는 마팅게일 차분과정을 따르므로 조건부 이분산성을 허락하며 백색잡음 가정을 완화한다. 가정 1.2와 1.3은 조건부 이분산성을 갖는 변동성이 정상성을 만족함을 의미한다. 가정 1.3은 적률의 유한성을 뜻한다. 조건부 이분산성을 허락함에 따라 적률의 차수가 높아지며 이분산성 연구에서 통상적으로 높은 적률 가정을 필요로 한다. 그리고 가정 1.4는 수준변수 x_t는 각각 단위근을 갖지만 공통의 확률적 추세와 장기 균형관계가 존재할 수 있음을 의미한다.

가정 1이 성립하면 Phillips and Durlauf (1986)의 불변 정리에 따라 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}u_t \Rightarrow W(r)=BM(\Sigma)$$

또한 가정 1이 성립하면 Engle and Granger (1987)의 ECM 표현 정리에 의하여 차분된 변수 Δx_t는 다음 이동 평균으로 표현할 수 있다.

$$\Delta x_t = C(L)u_t$$

그리고 수준 변수 x_t는 다음과 같이 I(1) 과정과 I(0) 과정으로 분해가 가능하다.

$$x_t = C(1)\sum_{i=1}^{t}u_i + C^*(L)u_t$$

여기서 $C^*(L)=\frac{C(L)-C(1)}{1-L}$.

따라서 불변정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} x_{[nr]} \Rightarrow C(1)\, W(r).$$

장기균형 검정은 적재 행렬 Π의 추정량을 통하여 밝힐 수 있다. 정리 1은 적재 행렬의 최소자승 추정량의 극한 분포이다.

정리 1: 가정 1이 성립하면,

$$n(\hat{\Pi} - \Pi) \Rightarrow \int dWW' C(1)' \left(\int C(1)\, WW' C(1)' \right)^{-1} \tag{9}$$

정리 1에 따르면 적재 행렬 추정량 $\hat{\Pi}$는 수렴 속도가 n과 같기 때문에 강일치성(super-consistency)을 만족한다. 또한 극한 분포는 비표준적 분포로 정규 분포와 다르고 그의 조건부 분산은 하나의 확률적 과정이므로 이에 대한 적절한 조정을 통하여 검정 통계량으로 사용할 수 있다. 검정 통계량 $Wald_n$은 조건부 분산에 대한 조정을 반영하여 이분산성을 적절히 통제한다.

표준 브라운 운동 $B(r) = \Sigma^{-1/2} W(r)$을 정의하면 장기균형 검정 통계량 $Wald_n$은 다음 분포 이론을 따른다.

정리 2: 가정 1과 귀무가설 $H_0 : \Pi = 0$이 사실이면 다음이 성립한다.

$$Wald_n \Rightarrow \mathrm{tr} \int dBB' \left(\int BB' \right)^{-1} \int BdB' \tag{10}$$

정리 2에 의하면 검정 통계량 $Wald_n$의 극한 분포는 p-차원 표준 브라운 운동 $B(r)$에 의해서 결정된다. 이는 Johansen (1988, 1991)의 비표준적 분포와 같다. 따라서 조건부 이분산성을 허락하는 검정 통계량 $Wald_n$의 분포 이론은 이분산성에 의한 영향을 받지 않는다. 또한 우도비 검정과 동일한 분포이론을 적용할 수 있다. 많은 통계 프로그램에서 비표준적 분포를 따르는 검정 통계량의 유의도와 임계값을 보이므로 검정 통계량 $Wald_n$에 의한 통계적 추론에 그대로 적용할 수 있다.

4. 장기균형 차수 검정

제2절에서 제시한 검정 통계량은 장기균형의 존재를 검정한다. 여기서는 이를 장기균형 차수에 대한 검정으로 확장하도록 한다. 차수 검정은 Gill and Lewbel (1992), Cragg and Donald (1996, 1997), Robin and Smith (2000)와 Kleibergen and Paap (2006)에서 제시되었다. 하지만 이들은 정상적 시계열 모형에서 차수 검정을 하였으며 Kleibergen and Paap (2006)은 비정상적 시계열에 대한 차수 검정을 포함하지만 조건부 이분산성을 고려하지 않았다. 그리고 Cragg and Donald (1996, 2997)는 행렬의 촐레스키 분해를 사용하고 있으며 Kleibergen and Paap (2006)은 단일해 분해를 알고리즘으로 한다. 여기서는 적재 행렬에 대한 단순 분해를 통하여 검정 통계량을 제시한다.

만일 장기균형 차수가 $r(0<r<p)$이면 $\Pi=\alpha\beta'$을 만족하는 열 차수가 r인 $p\times r$ 행렬 α와 β가 존재한다. 이들 행렬에 대하여 영 공간을 구성하는 $p\times(p-r)$ 행렬 $\alpha_\perp$와 $\beta_\perp$가 존재하며 이들은 $\alpha_\perp'\alpha=0$, $\beta_\perp'\beta=0$을 만족한다. 따라서 적재 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi &= (\alpha,\alpha_\perp)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \Phi\end{pmatrix}(\beta,\beta_\perp)' \\ &= \alpha\beta' + \alpha_\perp\Phi\beta_\perp'\end{aligned} \tag{11}$$

여기서 Φ 는 $(p-r)\times(p-r)$ 정방 행렬이다.

만일 장기균형 차수가 r과 같다면 $\Pi=\alpha\beta'$이므로 $\Phi=0$을 의미한다. 따라서 장기균형의 차수 검정을 위하여 다음과 같이 귀무가설과 대립가설을 세울 수 있다.

$$H_0:\Phi=0,\ \ H_1:\Phi\neq 0$$

귀무가설 $H_0:\Phi=0$이 성립하면 벡터자기회귀모형은 다음과 같다.

$$\Delta x_t=\alpha w_{t-1}+\sum_{i=1}^{k}\Gamma_i\Delta x_{t-i}+u_t \tag{12}$$

여기서 $w_t=\beta' x_t$.

벡터자기회귀모형을 추정하여 추정량 $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$와 영 공간 행렬의 추정량 $\hat{\beta}_\perp$, $\hat{\alpha}_\perp$를 얻을

수 있다. 영 공간 행렬의 추정은 QR 분해 알고리즘으로 구하였다. 이들은 직교 조건 $\hat{\alpha}_{\perp}^{'}\hat{\alpha}=0, \hat{\beta}_{\perp}^{'}\hat{\beta}=0$과 정규화 $\hat{\alpha}_{\perp}^{'}\hat{\alpha}_{\perp}=I$, $\hat{\beta}_{\perp}^{'}\hat{\beta}_{\perp}=I$을 충족한다. 또한 적재 행렬의 추정량 $\hat{\Pi}$는 제2절에서 얻을 수 있었다. 적재 행렬 추정량은 귀무가설에 관련하지 않고 일치성을 충족한다. 귀무가설에서 추정량 $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$은 일치성을 갖는다. 그리고 이를 통해 구해지는 추정량 $\hat{\beta}_{\perp}$, $\hat{\alpha}_{\perp}$ 역시 귀무가설에서 일치성을 갖는다.

만일 대립가설 $H_1:\Phi\neq 0$이 성립하면 벡터자기회귀모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta x_t=\alpha w_{t-1}+\alpha_{\perp}\Phi v_{t-1}+\sum_{i=1}^{k}\Gamma_i\Delta x_{t-i}+u_t \tag{13}$$

여기서 $v_t=\beta_{\perp}^{'}x_t$.

벡터자기회귀모형 (13)은 모수에 대한 비선형 제약으로 인하여 추정에 어려움이 따르기 때문에 장기균형 차수 검정에는 이를 직접 추정하지 않는다. 하지만 β를 알고 있다면 $\beta_{\perp}$, v_t, w_t를 얻을 수 있으므로 이를 사용하면 선형 모형이 되므로 추정이 용이하다. 그리고 귀무가설을 가정하여 모형 (12)을 추정하면 추정량은 귀무가설 하에서 일치성을 갖는다. 따라서 $\hat{\beta}$, $\hat{\beta}_{\perp}$, $\hat{\alpha}_{\perp}$이 주어지면 계수 행렬 Φ는 다음과 같이 추정이 가능하다.

$$\hat{\Phi}=\hat{\alpha}_{\perp}^{'}V_{01}V_{11}^{-1}, \tag{14}$$

여기서 $V_{01}=\sum_{t=1}^{n}\Delta x_t\hat{v}_{t-1}^{*'}$, $V_{11}=\sum_{t=1}^{n}\hat{v}_{t-1}^{*}\hat{v}_{t-1}^{*'}$,

$v_{t-1}^{*}=\hat{v}_{t-1}-\sum_{t=1}^{n}\hat{v}_{t-1}z_{t-1}^{*'}(\sum_{t=1}^{n}z_{t-1}^{*}z_{t-1}^{*'})^{-1}z_{t-1}^{*}$, $\quad z_{t-1}^{*}=\mathrm{vec}(\hat{w}_{t-1},\Delta x_{t-1},\Delta x_{t-2},\ldots,\Delta x_{t-k})$,

$\hat{w}_t=\hat{\beta}^{'}x_t$, $\hat{v}_t=\hat{\beta}_{\perp}^{'}x_t$.

장기균형 차수 검정을 위한 검정 통계량 $Wald_n^{*}$을 다음과 같이 정의한다.

$$Wald_n^{*} = [\mathrm{vec}(n\hat{\Phi}^{'})]^{'}\ H_n^{*-1}\ [\mathrm{vec}(n\hat{\Phi}^{'})]$$

(15)

여기서 $H_n^* = (I \otimes \frac{1}{n^2} V_{11})^{-1} \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} (\hat{\alpha}_\perp' \hat{u}_t^* \hat{u}_t^{*\prime} \hat{\alpha}_\perp \otimes \hat{v}_{t-1}^* \hat{v}_{t-1}^{*\prime})(I \otimes \frac{1}{n^2} V_{11})^{-1}$이고 $\hat{u}_t^*$는 모형 (13)의 회귀 잔차이다.

장기균형 차수가 r과 같다면 $\Pi = \alpha\beta'$을 만족하는 $p \times r$ 행렬 α와 β가 존재한다. Engle and Granger (1987)의 ECM 표현 정리를 사용하여 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} x_{[nr]} \Rightarrow C(1) W(r)$$

여기서 $(p-r) \times (p-r)$ 행렬 $C(1)$은 장기균형의 영 공간을 형성하므로 $\beta' C(1) = 0$, $C(1)\alpha = 0$ 을 만족한다. 장기균형 차수 검정 통계량의 분포 이론을 얻기 위하여 $(p-r)$ 차원 표준 브라운 운동 $B^*(r)$을 다음과 같이 정의한다.

$$B^*(r) = (\alpha_\perp' \Sigma \alpha_\perp)^{-1/2} \ \alpha_\perp' W(r)$$

정리 3: 가정 1과 귀무가설 $H_0 : \Phi = 0$이 사실이면 다음이 성립한다.

$$Wald_n^* \ \Rightarrow \ \mathrm{tr} \int dB^* B^{*\prime} (\int B^* B^{*\prime})^{-1} \int B^* dB^{*\prime}$$

정리 3에 의하면 장기균형 차수 검정 통계량의 분포는 표준 브라운 운동을 따르는 $B^*(r)$의 함수로 나타난다. 이는 Johansen (1991)에서 밝힌 비표준 분포와 동일하며 이에 대한 임계값이나 유의도가 통계 프로그램을 통하여 구할 수 있으므로 통계적 추론에 그대로 적용할 수 있다.

본 연구에서 제시한 장기균형 차수 검정 통계량은 조건부 이분산성을 허락하고 있으며 분포 이론은 이를 고려하지 않은 경우와 같음을 알 수 있다. 따라서 장기균형 검정의 분포이론은 조건부 이분산성을 허락하여도 불변임을 보인다. 이 결과는 부트스트래핑을 사용하여 장기균형검정을 연구한 Cavaliere, Rahbek, and Taylor (2010)에서 얻은 결과와 일치한다.

5. 몬테카를로 분석

장기균형검정 통계량에 대한 분포이론의 적합성을 밝히기 위하여 몬테카를로 분석을 시행하였다. 모의 시행에서 사용된 벡터자기회귀모형은 다음과 같이 세 개의 변수로 구성된 VAR(1)이다.

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \Gamma \Delta x_{t-1} + u_t$$

여기서 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t})'$, $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})'$.

교란항이 조건부 이분산성을 갖도록 Engle (1982)과 Bollerslev (1986)의 GARCH 모형을 몬테카를로 분석에 사용하였다. 따라서 VAR 교란항은 다음 GARCH(1,1) 모형을 따른다.

GARCH:

$$u_{jt} = \sigma_{jt}\epsilon_{jt},\ \ \epsilon_{jt} \sim i.i.d.(0,1)$$
$$\sigma_{jt}^2 = \omega_j + \psi_j u_{jt-1}^2 + \phi_j \sigma_{jt-1}^2,\ \ j = 1,2,3.$$

여기서 ϵ_{jt}는 Gauss 프로그램의 난수 발생기능을 활용하였으며 독립동일분포와 상호 독립성을 가정하였다. GARCH 계수 ϕ_j와 ARCH 계수 ψ_j는 각각 동일하도록 ($\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3$) 하였다. 모의 시행에서 표본 크기는 2,000으로 하였고 10,000번 반복 시행하였다. 그리고 $\Gamma = 0$으로 고정하였다.

<표 1>은 세 개의 귀무가설 $H_0 : \mathrm{rank}(\Pi) = 0$, $H_0 : \mathrm{rank}(\Pi) = 1$, $H_0 : \mathrm{rank}(\Pi) = 2$에 대하여 검정 통계량 $Wald_n$, $Wald_n^S$, LR_n 의 기각 확률을 보여준다. 첫 번째 귀무가설 $H_0 : \mathrm{rank}(\Pi) = 0$에서는 $\Pi = 0$으로 고정하여 자료를 발생하였다. 교란항에 이분산성이 없는 경우에는 검정 통계량 $Wald_n$과 LR_n 모두 유의수준 5%와 10%에 근접한 기각 확률을 보인다. 하지만 이분산성의 지속성이 커질수록 LR_n의 기각 확률이 유의수준을 초과하며 차이도 커지는 것으로 나타난다. 예를 들어, $\psi = 0.20$, $\phi = 0.79$인 경우 우도비 검정 통계량은 유의수준 5%에서 10.69% 귀무가설을 기각한다. 하지만 검정 통계량 $Wald_n$는 4.79% 기각 확률을 보이며 다른 경우에도 유의수준과 큰 차이를 보이지 않는다. 따라서 새로운 검정 통계량 $Wald_n$는 조건부 이분산성이 크게 증가하여도 신뢰수준의 정확성을 유지하였다. 이와 비교하여 이분산성을 고려하지 않은 통계량 $Wald_n^S$는 우도비 검정 통계량과 근사적으로 동일한 결과를 보이고 있으며 이분산성에 의한 영향을 받는 것으로 보인다.

<표 1>은 장기균형 검정과 함께 장기균형 차수 검정의 기각 확률을 측정하여 유의수

준과의 비교를 통하여 검정의 적합성을 측정한다. 두 번째 귀무가설인 $H_0:\mathrm{rank}(\Pi)=1$에서는 $\Pi=\alpha\beta'$, $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$을 가정하였다. 그리고 귀무가설 $H_0:\mathrm{rank}(\Pi)=2$에서는 $\Pi=\alpha\beta'$, $\alpha=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$을 가정하였다. 장기균형 차수 검정에 있어서 검정 통계량 $Wald_n$는 조건부 이분산성의 지속성이 증가하여도 기각 확률이 유의수준에 근접하여 검정의 정확성을 보인다. 이 결과는 새로운 검정 통계량이 우도비 검정 통계량과 달리 조건부 이분산성을 허락하고 있기 때문으로 보인다.

<표 2>에서는 교란항의 분포를 정규분포에서 t-분포로 전환하여 정확성을 측정하였고 GARCH 모형에 추가하여 다른 조건부 이분산성 모형을 적용한 결과를 보인다. 첫 번째 분석은 정규분포가 아닌 자유도 5를 갖는 t-분포를 가정하여 교란항을 발생하고 귀무가설 $H_0:\mathrm{rank}(\Pi)=0$에서 장기균형 검정 통계량의 기각 확률을 구하였다. Lucas (1997)는 정규분포가 아닌 경우 우도비 검정 통계량이 미확인 모수에 의한 영향을 받게 됨을 보였다. 자유도 5를 갖고 t-분포를 따르는 교란항은 첨도가 크고 특이 관측치의 주기가 높기 때문에 검정 통계량의 정확성에 영향을 미칠 것으로 예상되었으나 <표 2>에서 보는 바와 같이 분포에 의한 영향은 크지 않음으로 나타났다.

이와 함께 <표 2>는 GARCH 변동성 모형을 확장한 EGARCH, TGARCH 모형으로 교란항의 조건부 이분산성을 가정하여 장기균형검정의 적합성을 측정한 결과를 보인다. EGARCH, TGARCH 모형에서는 충격의 크기와 함께 부호에 따라 변동성에 미치는 효과가 다르다. EGARCH, TGARCH 모형에서 비대칭성 모수 ν_j의 값이 0이면 변동성은 충격의 부호와 무관하게 반응한다. 하지만 모수 ν_j의 값이 양수이면 부(-)의 충격이 변동성에 미치는 효과가 정(+)의 충격의 효과보다 크다. 또한 EGARCH 모형에서 모수 ν_j의 값이 1보다 크면 부의 충격은 변동성을 확대하지만 정의 충격은 변동성을 오히려 축소한다. 모의시행에서 모수 ω_j는 EGARCH 모형에서는 0, TGARCH 모형에서는 1로 고정하였다.

그리고 $u_{jt}=\sigma_{jt}\epsilon_{jt}$에서 ϵ_{jt}는 정규분포를 가정하였다. 따라서 $E|\frac{u_{jt}}{\sigma_{jt}}|=\sqrt{2/\pi}$와 같다.

EGARCH:

$$\log\sigma_{jt}^2=\omega_j+\psi_j\left(\left|\frac{u_{jt-1}}{\sigma_{jt-1}}\right|-E\left|\frac{u_{jt-1}}{\sigma_{jt-1}}\right|-\nu_j\frac{u_{jt-1}}{\sigma_{jt-1}}\right)+\phi\log\sigma_{jt-1}^2,\ j=1,2,3.$$

TGARCH:

$$\sigma_{jt}^2 = \omega_j + \psi_j u_{jt-1}^2 + \phi_j \sigma_{jt-1}^2 + \nu_j u_{jt-1}^2 (u_{jt-1} < 0),\ j = 1,2,3.$$

<표 2>를 보면 비대칭적 변동성을 설명하는 EGARCH, TGARCH 이분산성에서도 검정 통계량 $Wald_n$은 유의수준에 근접하는 기각 확률을 보인다. 비대칭성과 지속성이 커지면서 우도비 검정 통계량의 기각 확률은 유의수준을 초과하는 현상을 보인다. 그리고 GARCH 변동성 모형에서 확률적 변동성 모형으로 조건부 이분산성을 가정하여 실시한 모의시행에서도 검정 통계량 $Wald_n$은 이분산성에 일치하는 결과를 보여준다. 확률적 변동성 모형은 다음과 같으며 몬테카를로 분석에서 모수 ω_j는 0으로, σ_j^2은 1로 고정하였다.

확률적 변동성:

$$\log\sigma_{\mathrm{jt}}^2 = \omega_{\mathrm{j}} + \phi_{\mathrm{j}} (\log\sigma_{\mathrm{jt-1}}^2 - \omega_{\mathrm{j}}) + \eta_{\mathrm{jt}},\ j = 1,2,3.$$

$$\eta_{jt} \sim n.i.d.(0, \sigma_j^2)$$

<표 3>에서는 Pitman의 부분 구간 대립 가설을 활용하여 장기균형 검정 통계량의 검정력을 측정하였다. 모의 시행에는 다음 VAR(1) 모형을 사용하였다.

$$\Delta x_t = \Pi_n x_{t-1} + \Gamma \Delta x_{t-1} + u_t$$

여기서 적재 행렬에 대하여 다음과 같이 부분 구간 대립 가설을 가정하였다.

$$\Pi_n = \alpha_n \beta',$$

여기서 $\alpha_n = (-\frac{d}{n}, 0, 0)',\ \beta = (1, -1, -1)'$.

<표 3>은 검정 통계량 $Wald_n$과 우도비 검정 통계량 LR_n이 유의수준 5%에서 귀무가설을 기각하는 확률을 보여준다. 우도비 검정은 사이즈(size)를 조정한 기각 확률이다. 조건부 이분산성이 없는 경우에는 두 검정 통계량의 기각 확률이 거의 비슷하다. 따라서 이분산성이 없다면 Wald 검정통계량은 우도비 검정통계량과 동일한 검정력을 갖고 있음을 보여준다.

<표 3>에서 귀무가설로부터 이탈하면서 검정 통계량의 기각 확률이 증가한다. 하지만 이분산성의 지속성이 커지면서 전반적으로 검정력이 하락하는 현상을 보여준다. Wald 검

정 통계량은 d의 값이 작은 경우 우도비 검정 통계량에 비하여 검정력이 높은 것으로 나타났다. 그러나 귀무가설에서 멀리 떨어질수록 우도비 검정 통계량의 검정력이 크게 나타났다. 이 결과는 우도비 검정 통계량의 경우 이분산성에 의한 영향을 많이 받지만 Wald 검정 통계량은 이분산성의 효과를 상대적으로 차단하기 때문으로 보인다.

<표 4>에서는 다음 부분 구간 대립 가설을 가정하여 $H_0 : \mathrm{rank}(\Pi) = 1$에 대한 장기균형 차수 검정의 기각확률을 측정하였다.

$$\Pi_n = \alpha_n \beta',$$

여기서 $\alpha_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

장기균형 검정에서와 같이 차수 검정에서도 이분산성이 없는 경우 검정 통계량 $Wald_n$은 우도비 검정과 비슷한 기각 확률을 보인다. 이분산성의 지속성이 커지면 검정 통계량 $Wald_n$은 d의 값이 작은 경우에는 우도비 검정에 비하여 상대적으로 높은 기각 확률을 보인다. 장기균형 검정에서와 같이 d의 값이 커지면서 우도비 검정의 기각력이 상대적으로 커지는 결과를 보인다. 이는 우도비 검정통계량이 귀무가설과 함께 대립가설에서 이분산성에 의한 영향을 많이 받기 때문으로 보인다.

6. 결론

본 연구에서는 단위근을 갖는 시계열 변수로 구성된 벡터자기회귀모형에서 교란항에 조건부 이분산성을 허락하여 장기균형 검정 통계량을 제시하고 그의 분포이론을 연구하였다. 독립동일 분포에서 출발하는 우도비 검정은 등분산성을 가정하므로 실제 자료의 특성을 반영하지 못하고 극한 분포이론과 상이한 결과를 보여준다. 이와 비교하여 새로운 검정 통계량은 이분산성을 허용하기 때문에 분포이론과 실제 응용에서 발견되는 마찰을 피할 수 있고 기존 검정방법의 문제점을 완화할 수 있을 것이다. 또한 새로운 검정 통계량의 분포이론을 유도하였으며 이는 우도비 검정의 분포이론과 동일함을 보였다. 따라서 장기균형 검정의 분포이론은 조건부 이분산성을 허락하여도 변하지 않음을 얻을 수 있다. 그리고 몬테카를로 시뮬레이션을 통하여 장기균형 검정 통계량의 특성을 측정하였으며 새로운 검정 통계량은 조건부 이분산성에 일치하는 결과를 얻었다.

본 연구는 장기균형을 검정하는데 있어 조건부 이분산성에 일치하는 검정방법을 제시

하여 보다 정확성을 향상시킨 점에서 기여를 찾을 수 있다. 만일 이분산성의 정보를 활용할 경우 효율성의 측면에서 새로운 결과가 제시될 수 있을 것으로 기대된다. 이에 대하여는 후속 연구를 통하여 밝히도록 한다.

■ 참고문헌

Bollerslev, T., 1986, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31, 307-327.

Campbell, J. and R. Shiller, 1987, Cointegration and tests of present value models, Journal of Political Economy 95, 1062-1088.

Cavaliere, G., A. Rahbek, and R. Taylor, 2010, Co-integration rank testing under conditional heteroskedasticity, Econometric Theory, forthcoming.

Cheung, Y. W. and K. S. Lai, 1993, Finite sample sizes of Johansen's likelihood ratio tests for cointegration, Oxford Bulletin of Economics and Statistics 55, 313-332.

Cragg, J. C. and S. G. Donald, 1996, On the asymptotic properties of LDU-based tests of the rank of a matrix, Journal of the American Statistical Association 91, 1301-1309.

Cragg, J. C. and S. G. Donald, 1997, Inferring the rank of a matrix, Journal of Econometrics 76, 223-250.

Engle, R., 1982, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, Econometrica 50, 987-1008.

Engle, R. F. and C. W. J. Granger, 1987, Cointegration and error correction representation, estimation, and testing, Econometrica 55, 251-276.

Engle, R. and B. Yoo, 1987, Forecasting and testing in cointegrated systems, Journal of Econometrics 35, 143-159.

Gill, L. and A. Lewbel, 1992, Testing the rank and definiteness of estimated matrices with applications to factor, State-Space and ARMA Models, Journal of the American Statistical Association 87, 766-776.

Hansen, B. E., 1992, Convergence to stochastic integrals for dependent heterogeneous processes, Econometric Theory 8, 489-500.

Hansen, B. E., 1995, Regression with nonstationary volatility, Econometrica 63, 1113-1132.

Haug, A. A, 1996, Tests for cointegration: A Monte Carlo comparison, Journal of Econometrics 71, 89-115

Jansson, M, 2005, Point optimal tests of the null hypothesis of cointegration, Journal of Econometrics 124, 187-201.

Johansen, S., 1988, Statistical analysis of cointegrating vectors, Journal of Economic Dynamics and Control 12, 231-254.

Johansen, S., 1991, Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, Econometrica 59, 1551-1580.

Johansen, S., 2000, A Bartlett correction factor for tests on the cointegrating relations, Econometric Theory 740-778.

Johansen, S., 2002, A small sample correction for tests of hypotheses on the cointegrating vectors, Journal of Econometrics 111, 195-221.

King, R., C. Plosser, J. Stock, and M. Watson, 1991, Stochastic trends and economic fluctuations, American Economic Review 81, 819-840.

Kleibergen, F. and R. Paap, 2006, Generalized reduced rank tests using the singular value decomposition, Journal of Econometrics 133, 97-126.

Lee, T. H. and Y. Tse, 1996, Cointegration tests with conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics 73, 401-410.

Li, W. K., S. Ling, and H. Wong, 2001, Estimation for partially nonstationary multivariate autoregressive models with conditional heteroskedasticity, Biometrika 88, 1135-1152.

Ling, S., and W. K. Li, 1998, Limiting distributions of maximum likelihood estimators for unstable autoregressive moving-average time series with general autoregressive heteroskedastic errors, Annals of Statistics 26, 84-125.

Lucas, A., 1997, Cointegration testing using pseudolikelihood ratio tests, Econometric Theory 13, 149-169.

Lutkepohl, H., and P. Saikkonen, 2000, Testing for the cointegrating rank of a VAR process with a time trend, Journal of Econometrics 95, 177-198.

Phillips, P., 1991, Optimal inference in cointegrated system, Econometrica 59, 283-306.

Phillips, P. and S. N. Durlauf, 1986, Multiple time series with integrated variables, Review of Economic Studies 53, 473-495.

Phillips, P. and S. Ouliaris, 1990, Asymptotic properties of residual based tests for cointegration, Econometrica 58, 165-194.

Robin, J. M. and R. J. Smith, 2000, Tests of rank, Econometric Theory 16, 151-175.

Seo, B, 1998, Statistical inference on cointegration rank in error correction models with stationary covariates, Journal of Econometrics 85, 339-385.

Seo, B., 1999, Distribution theory for unit root tests with conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics 91, 113-144.

Seo, B. 2007, Asymptotic Distribution of the Cointegrating Vector Estimator in Error Correction Models with Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics 137, 68-111.

Stock, J. and M. Watson, 1988, Testing for common trends, Journal of American Statistical Association 83, 1097-1107.

Swensen, A., 2006, Bootstrap algorithms for testing and determining the cointegration rank in VAR models, Econometrica 74, 1699-1714.

Toda, H. Y., 1995, Finite sample performance of likelihood ratio tests for cointegration rank in vector autoregressions, Econometric Theory 11, 1015-1032.

White, H., 1980, A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity, Econometrica 48, 817-838.

<표 1> 장기균형 검정의 적합성

	유의수준=0.05			유의수준=0.10		
	$Wald_n$	$Wald_n^S$	LR_n	$Wald_n$	$Wald_n^S$	LR_n
	$H_0:\mathrm{rank}(\Pi)=0$			$H_1:\mathrm{rank}(\Pi)>0$		
0.00, 0.00	0.0478	0.0506	0.0517	0.0978	0.1003	0.1016
0.10, 0.85	0.0456	0.0516	0.0522	0.0979	0.1074	0.1090
0.10, 0.89	0.0499	0.0731	0.0749	0.0985	0.1346	0.1372
0.10, 0.90	0.0468	0.1207	0.1226	0.0972	0.1907	0.1929
0.20, 0.75	0.0480	0.0625	0.0643	0.0974	0.1167	0.1193
0.20, 0.79	0.0479	0.1050	0.1069	0.0963	0.1693	0.1722
0.20, 0.80	0.0474	0.1392	0.1420	0.0951	0.2111	0.2142
	$H_0:\mathrm{rank}(\Pi)=1$			$H_1:\mathrm{rank}(\Pi)>1$		
0.00, 0.00	0.0511	0.0512	0.0520	0.1063	0.1076	0.1083
0.10, 0.85	0.0486	0.0519	0.0525	0.0992	0.1039	0.1047
0.10, 0.89	0.0490	0.0631	0.0638	0.0970	0.1246	0.1254
0.10, 0.90	0.0498	0.0976	0.0981	0.1012	0.1706	0.1713
0.20, 0.75	0.0475	0.0556	0.0560	0.0993	0.1124	0.1135
0.20, 0.79	0.0511	0.0873	0.0882	0.1049	0.1501	0.1505
0.20, 0.80	0.0510	0.1126	0.1132	0.1037	0.1803	0.1813
	$H_0:\mathrm{rank}(\Pi)=2$			$H_1:\mathrm{rank}(\Pi)>2$		
0.00, 0.00	0.0513	0.0515	0.0515	0.0993	0.0990	0.0992
0.10, 0.85	0.0482	0.0509	0.0511	0.1015	0.1008	0.1011
0.10, 0.89	0.0465	0.0592	0.0592	0.0993	0.1128	0.1128

0.10, 0.90	0.0444	0.0813	0.0813	0.0945	0.1377	0.1378
0.20, 0.75	0.0473	0.0526	0.0527	0.1019	0.1069	0.1070
0.20, 0.79	0.0463	0.0692	0.0695	0.0970	0.1235	0.1235
0.20, 0.80	0.0461	0.0816	0.0818	0.0954	0.1343	0.1344

<표 2> 장기균형 검정의 적합성 ($H_0 : \mathrm{rank}(\Pi) = 0, \quad H_1 : \mathrm{rank}(\Pi) \geq 1$)

	유의수준=0.05			유의수준=0.10		
	$Wald_n$	$Wald_n^S$	LR_n	$Wald_n$	$Wald_n^S$	LR_n
ψ, ϕ	t-분포, 자유도 5					
0.00, 0.00	0.0442	0.0502	0.0510	0.0903	0.1002	0.1017
0.10, 0.85	0.0437	0.0574	0.0587	0.0887	0.1065	0.1084
0.10, 0.89	0.0444	0.0841	0.0862	0.0866	0.1440	0.1464
0.10, 0.90	0.0421	0.1228	0.1243	0.0889	0.1949	0.1976
0.20, 0.75	0.0426	0.0721	0.0738	0.0866	0.1265	0.1289
0.20, 0.79	0.0388	0.1124	0.1144	0.0826	0.1762	0.1778
0.20, 0.80	0.0403	0.1367	0.1389	0.0805	0.2073	0.2097
ψ, ϕ, ν	EGARCH: $\log\sigma_t^2 = \omega + \psi(\lvert\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\rvert - E\lvert\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\rvert - \nu\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}) + \phi\log\sigma_{t-1}^2$					
0.1,0.99,0.00	0.0488	0.0551	0.0563	0.0962	0.1071	0.1095
0.1,0.99,0.5	0.0504	0.0622	0.0634	0.0970	0.1144	0.1167
0.1,0.99,1.0	0.0511	0.0722	0.0733	0.1017	0.1316	0.1338
ψ, ϕ, ν	TGARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \psi u_{t-1}^2 + \phi\sigma_{t-1}^2 + \nu u_{t-1}^2(u_{t-1} < 0)$					
0.2,0.75,0.00	0.0480	0.0625	0.0643	0.0974	0.1167	0.1193
0.2,0.75,0.04	0.0470	0.0776	0.0791	0.0950	0.1356	0.1375
0.2,0.75,0.05	0.0475	0.0834	0.0851	0.0961	0.1456	0.1479
ϕ	확률적 변동성: $\log\sigma_t^2 = \omega + \phi(\log\sigma_{t-1}^2 - \omega) + \eta_t$					
0.00	0.0423	0.0468	0.0478	0.0895	0.0982	0.1002
0.50	0.0424	0.0480	0.0498	0.0902	0.0988	0.1006
0.90	0.0315	0.0858	0.0875	0.0740	0.1522	0.1546

<표 3> 검정 통계량의 검정력 (H_0 : rank(Π) = 0, H_1 : rank(Π) ≥ 1)

		d				
		5	10	15	20	25
0.00, 0.00	$Wald_n$	0.2203	0.5677	0.8544	0.9707	0.9966
	$Wald_n^S$	0.2187	0.5719	0.8614	0.9730	0.9973
	LR_n	0.2192	0.5736	0.8625	0.9733	0.9974
0.10, 0.85	$Wald_n$	0.2344	0.5685	0.8390	0.9524	0.9879
	$Wald_n^S$	0.2235	0.5660	0.8585	0.9682	0.9960
	LR_n	0.2234	0.5661	0.8585	0.9683	0.9961
0.10, 0.89	$Wald_n$	0.2694	0.5630	0.7727	0.8737	0.9278
	$Wald_n^S$	0.2122	0.5254	0.7902	0.9285	0.9762
	LR_n	0.2122	0.5269	0.7909	0.9292	0.9766
0.10, 0.90	$Wald_n$	0.3770	0.5967	0.7263	0.7920	0.8425
	$Wald_n^S$	0.2614	0.5167	0.7175	0.8353	0.9080
	LR_n	0.2613	0.5168	0.7176	0.8355	0.9082
0.20, 0.75	$Wald_n$	0.2475	0.5607	0.7967	0.9063	0.9538
	$Wald_n^S$	0.2139	0.5422	0.8286	0.9533	0.9908
	LR_n	0.2137	0.5424	0.8291	0.9533	0.9908
0.20, 0.79	$Wald_n$	0.3223	0.5732	0.7327	0.8154	0.8609
	$Wald_n^S$	0.2207	0.4969	0.7442	0.8818	0.9439
	LR_n	0.2202	0.4970	0.7442	0.8816	0.9441
0.20, 0.80	$Wald_n$	0.3805	0.5942	0.7128	0.7775	0.8212
	$Wald_n^S$	0.2288	0.4656	0.6829	0.8145	0.8937
	LR_n	0.2286	0.4657	0.6834	0.8150	0.8940

*유의수준 5%

<표 4> 검정 통계량의 검정력 (H_0 : rank$(\Pi)=1$, H_1 : rank$(\Pi) \geq 2$)

		d				
		5	10	15	20	25
0.00, 0.00	$Wald_n$	0.2076	0.5705	0.8790	0.9809	0.9986
	$Wald_n^S$	0.2069	0.5718	0.8820	0.9827	0.9987
	LR_n	0.2069	0.5720	0.8822	0.9827	0.9987
0.10, 0.85	$Wald_n$	0.2235	0.5627	0.8481	0.9569	0.9892
	$Wald_n^S$	0.2127	0.5711	0.8742	0.9786	0.9966
	LR_n	0.2128	0.5710	0.8743	0.9786	0.9966
0.10, 0.89	$Wald_n$	0.2383	0.5246	0.7380	0.8537	0.9058
	$Wald_n^S$	0.2200	0.5556	0.8303	0.9493	0.9854
	LR_n	0.2201	0.5559	0.8306	0.9493	0.9854
0.10, 0.90	$Wald_n$	0.2946	0.5127	0.6515	0.7423	0.8020
	$Wald_n^S$	0.2333	0.5011	0.7234	0.8614	0.9334
	LR_n	0.2333	0.5014	0.7233	0.8614	0.9336
0.20, 0.75	$Wald_n$	0.2376	0.5547	0.7937	0.9087	0.9460
	$Wald_n^S$	0.2245	0.5759	0.8597	0.9685	0.9926
	LR_n	0.2243	0.5761	0.8597	0.9685	0.9926
0.20, 0.79	$Wald_n$	0.2611	0.5058	0.6607	0.7616	0.8084
	$Wald_n^S$	0.2030	0.5051	0.7669	0.9052	0.9590
	LR_n	0.2034	0.5054	0.7670	0.9053	0.9591
0.20, 0.80	$Wald_n$	0.2924	0.4960	0.6217	0.7003	0.7447
	$Wald_n^S$	0.2022	0.4549	0.6970	0.8473	0.9172
	LR_n	0.2022	0.4546	0.6969	0.8471	0.9172

*유의수준 5%

부 록 : 수학적 증명

증명을 위하여 벡터자기회귀모형 $\Pi(L)x_t = u_t$에 대하여 Engle and Granger (1987)의 ECM 표현 정리를 사용한다. ($\Pi(L) = (1-L)I - \Pi L - \sum_{i=1}^{k} \Gamma_i (1-L) L^i$)

$$\Delta x_t = C(L)u_t,$$
$$x_t = C(1)\sum_{i=1}^{t} u_i + C^*(L)u_t,$$

여기서 $C(1) = \beta_{\perp}[\alpha'_{\perp}\Pi^*(1)\beta_{\perp}]^{-1}\alpha'_{\perp}$이고 $\Pi^*(L) = \dfrac{\Pi(L) - \Pi(1)}{1-L}$.

만일 $\Pi = 0$인 경우에는 $C(1) = [\Pi^*(1)]^{-1}$.

정리 1

Phillips and Durlauf (1986)의 불변 정리를 적용하여 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} u_t \Rightarrow W(r) = BM(\Sigma),$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} x_{[nr]} \Rightarrow C(1)\, W(r).$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_{1t-1}u'_t &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}u'_t - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}z'_{t-1}\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_{t-1}z'_{t-1}\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} z_{t-1}u'_t\Big)\\ &\Rightarrow \int C(1)\, W dW'\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}R_{1t-1}R_{1t-1}^{'} = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}x_{t-1}x_{t-1}^{'} - \frac{1}{n}(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{t-1}z_{t-1}^{'})(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_{t-1}z_{t-1}^{'})^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_{t-1}x_{t-1}^{'})$$
$$\Rightarrow \int C(1)WW^{'}C(1)^{'}$$

최소자승추정량 $\hat{\Pi}$의 극한 분포는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} n(\hat{\Pi}-\Pi) &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}u_t R_{1t-1}^{'}(\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}R_{1t-1}R_{1t-1}^{'})^{-1} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}u_t x_{t-1}^{'}(\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}x_{t-1}x_{t-1}^{'})^{-1} + o_p(1) \\ &\Rightarrow \int dWW^{'}C(1)^{'}(\int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1} \end{aligned}$$

정리 2

우선 $\eta_t = u_t u_t^{'} - \Sigma$를 정의하면 $E(\eta_t) = 0$이다. 가정 1이 성립하면 Hansen (1992)의 분포 이론을 적용하여 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\eta_t \otimes x_{t-1}x_{t-1}^{'}) = o_p(1),$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\eta_t \otimes R_{1t}R_{1t}^{'}) = o_p(1),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t\hat{u}_t^{'} \otimes R_{1t}R_{1t}^{'}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(u_t u_t^{'} \otimes R_{1t}R_{1t}^{'}) \\ &= (\Sigma \otimes \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}R_{1t}R_{1t}^{'}) + \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\eta_t \otimes R_{1t}R_{1t}^{'}) \\ &\Rightarrow (\Sigma \otimes \int C(1)WW^{'}C(1)^{'}) \end{aligned}$$

이 결과를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} H_n &= (I \otimes \frac{1}{n^2}S_{11})^{-1}\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t\hat{u}_t^{'} \otimes R_{1t}R_{1t}^{'})(I \otimes \frac{1}{n^2}S_{11})^{-1} \\ &\Rightarrow (I \otimes \int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1}(\Sigma \otimes \int C(1)WW^{'}C(1)^{'})(I \otimes \int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1} \\ &= [\Sigma \otimes (\int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1}] \end{aligned}$$

따라서 귀무가설 $H_0:\Pi=0$이 사실이면 p-차원 표준 브라운 운동 $B(r)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
Wald_n &= [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})]^{'}\ H_n^{-1}\ [\mathrm{vec}(n\hat{\Pi}^{'})] \\
&\Rightarrow [\mathrm{vec}(\int dWW^{'}C(1)^{'}(\int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1})]^{'} \\
&\quad [\Sigma\otimes(\int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1}]^{-1} \\
&\quad [\mathrm{vec}(\int dWW^{'}C(1)^{'}(\int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1})] \\
&= \mathrm{tr}\ \Sigma^{-1}\int dWW^{'}C(1)^{'}(\int C(1)WW^{'}C(1)^{'})^{-1}\int WdW^{'}C(1)^{'} \\
&= \mathrm{tr}\ \int dBB^{'}(\int BB^{'})^{-1}\int BdB^{'}
\end{aligned}$$

여기서 $B(r)=\Sigma^{-1/2}W(r)=BM(I)$.

정리 3

먼저 $\hat{w}_t=\hat{\beta}^{'}x_t$와 $w_t=\beta^{'}x_t$를 정의하면 $n(\hat{\beta}-\beta)=O_p(1)$이므로 $\hat{w}_t=w_t+o_p(1)$이다. 또한 $\hat{v}_t=\hat{\beta}_{\perp}^{'}x_t$와 $v_t=\beta_{\perp}^{'}x_t$를 정의하면 $\hat{v}_t=v_t+o_p(1)$이다.

귀무가설 $\Pi=\alpha\beta^{'}$하에서 Phillips and Durlauf (1986)의 분포이론을 적용하면 $v_t=\beta_{\perp}^{'}x_t$에 대하여 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}v_{[nr]}\Rightarrow\beta_{\perp}^{'}C(1)W(r)\equiv CW(r)$$

이 결과를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}V_{11} &= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\hat{v}_{t-1}\hat{v}_{t-1}^{'}-\frac{1}{n}(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{v}_{t-1}z_{t-1}^{*'})(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_{t-1}^{*}z_{t-1}^{*'})^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_{t-1}^{*}\hat{v}_{t-1}^{'}) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}v_{t-1}v_{t-1}^{'}+o_p(1) \\
&\Rightarrow\int CWW^{'}C^{'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}V_{10} &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{v}_{t-1}u_t^{'} - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{v}_{t-1}z_{t-1}^{*'}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_{t-1}^{*}z_{t-1}^{*'}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_{t-1}^{*}u_t^{'}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}v_{t-1}u_t^{'} + o_p(1)\\ &\Rightarrow \int CWdW^{'}\end{aligned}$$

따라서 $\hat{\Phi}=\hat{\alpha}_{\perp}^{'}V_{01}V_{11}^{-1}$ 에 대하여 다음을 얻는다.

$$n(\hat{\Phi}-\Phi) \Rightarrow \alpha_{\perp}^{'}\int dWW^{'}C^{'}\ \left(\int CWW^{'}C^{'}\right)^{-1}$$

정리 2에서와 같이 $\eta_t^{*}=\alpha_{\perp}^{'}(u_t u_t^{'}-\Sigma)\alpha_{\perp}$ 을 정의하면 $\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\eta_t^{*}\otimes x_{t-1}x_{t-1}^{'})=o_p(1)$이 성립하므로 $\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\eta_t^{*}\otimes v_{t-1}^{*}v_{t-1}^{*'})=o_p(1)$ 을 얻는다. 이를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\hat{\alpha}_{\perp}^{'}\hat{u}_t^{*}\hat{u}_t^{*'}\hat{\alpha}_{\perp}\otimes\hat{v}_{t-1}^{*}\hat{v}_{t-1}^{*'}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\alpha_{\perp}^{'}u_t u_t^{'}\alpha_{\perp}\otimes v_{t-1}^{*}v_{t-1}^{*'}) + o_p(1)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\alpha_{\perp}^{'}\Sigma\alpha_{\perp}\otimes v_{t-1}^{*}v_{t-1}^{*'}) + o_p(1)\\ &\Rightarrow (\alpha_{\perp}^{'}\Sigma\alpha_{\perp}\otimes\int CWW^{'}C^{'})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_n^{*} &= \left(I\otimes\frac{1}{n^2}V_{11}\right)^{-1}\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}(\hat{\alpha}_{\perp}^{'}\hat{u}_t^{*}\hat{u}_t^{*'}\hat{\alpha}_{\perp}\otimes\hat{v}_{t-1}^{*}\hat{v}_{t-1}^{*'})\left(I\otimes\frac{1}{n^2}V_{11}\right)^{-1}\\ &\Rightarrow \left(I\otimes\int CWW^{'}C^{'}\right)^{-1}\left(\alpha_{\perp}^{'}\Sigma\alpha_{\perp}\otimes\int CWW^{'}C^{'}\right)\left(I\otimes\int CWW^{'}C^{'}\right)^{-1}\\ &= \left[\alpha_{\perp}^{'}\Sigma\alpha_{\perp}\otimes\left(\int CWW^{'}C^{'}\right)^{-1}\right]\end{aligned}$$

따라서 귀무가설 $H_0:\Phi=0$이 사실이면 $(p-r)$ 차원 표준 브라운 운동 $B^{*}(r)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
Wald_n^* =\ & [\mathrm{vec}(n\hat{\Phi}^{'})]^{'}\ H_n^{*-1}\ [\mathrm{vec}(n\hat{\Phi}^{'})] \\
\Rightarrow & [\mathrm{vec}(\alpha_{\perp}^{'}\int dWW^{'}C^{'}(\int CWW^{'}C^{'})^{-1})]^{'} \\
& [\alpha_{\perp}^{'}\Sigma\alpha_{\perp}\otimes(\int CWW^{'}C^{'})^{-1}]^{-1} \\
& [\mathrm{vec}(\alpha_{\perp}^{'}\int dWW^{'}C^{'}(\int CWW^{'}C^{'})^{-1})] \\
=\ & \mathrm{tr}\ \ (\alpha_{\perp}^{'}\Sigma\alpha_{\perp})^{-1}\alpha_{\perp}^{'}\int dWW^{'}C^{'}(\int CWW^{'}C^{'})^{-1}\int CWdW^{'}\alpha_{\perp} \\
=\ & \mathrm{tr}\ \int dB^{*}B^{*'}(\int B^{*}B^{*'})^{-1}\int B^{*}dB^{*'}
\end{aligned}
$$

여기서 $B^{*}(r)=(\alpha_{\perp}^{'}\Sigma\alpha_{\perp})^{-1/2}\ \alpha_{\perp}^{'}W(r)=BM(I).$