

Nonparametric Estimation of the Continuous Power Variation and Discrete Volatility Jumps in the Ultra-high Frequency Stock Prices^{*}

Chae-Deug Yi[†]

Abstract This paper analyzes the realized jump volatility and jump probability of US SPC500 returns using the ultra-high frequency such as the five minute returns spanning the period from January 2001 through September 2010. The realized rate of returns, realized variation and realized bipower variation have the characteristics of nonnormal distributions and the volatility clustering effects. The volatility of US SPC500 appeared appreciably large in years 2002, 2004, 2006 and 2008, and especially large in year 2009 during which the world financial crisis occurred. The empirical results show that many large jumps appeared right after the world financial crisis. Especially before and after the year 2009, the realized variations had the extremely large discrete jumps and appreciably large jumps occurred in years 2002, 2004, 2006 and 2008, respectively. The empirical estimates also show that the realized US SPC500 five minute returns have the jump probability that there is at least one significant jump per five or seven days using the Tripower quarticity, nine or ten days using Quad-power quarticity, ten or twenty days using Min realized variation(Min RV) and Med realized variation(Med RV) during January 2001 through September 2010 at common critical levels.

Keywords Nonparametric Volatility Estimation, Realized Power Volatility, Jump Statistic, Jump Probability

JEL Classification G10, G30

^{*} This research is supported by National Research Foundation of Korea(KRF-2009-327-B00138).

[†] Professor, Graduate School of International Studies, Pusan National University, Email address:

givethanks@pusan.ac.kr

초고빈도 주가지수의 연속적인 파워변동과 이산적 변동성 점프에 대한 비모수적 추정*

이재득†

Abstract 본 연구는 2001년-2010년 동안 미국의 SPC500 주가지수의 하루 5분 간격의 초고빈도자료(총 208,054개 관측치)를 사용하여 미국 SPC500 주가지수 수익률을 새로운 분석기법인 비모수적 실현 변동성과 변동성 파워 이론을 사용하여 주가지수 수익률의 연속적 변동성과 불연속적 점프변동성, 그리고 점프 통계량과 점프 발생확률에 대한 추정과 실증분석을 하였다. 2001년-2010년 동안의 초고빈도 SPC500 주가지수에 대한 분석결과, 실현된 수익률(RR), 실현된 수익률의 변동(RV), 그리고 실현된 수익률의 Bipower 변동성(BV) 모두 변동성집중현상을 보이고 있는데 특히 2009년 전후에 변동성이 크게 나타났다. SPC500 주가지수의 실현된 수익률의 변동성은 2002년, 2004년, 2006년, 2008년에 다소의 불규칙적인 점프가 종종 있었고, 특히 세계금융위기가 있었던 2008년 이후 2009년 전후로 아주 큰 점프가 상당히 크게 그리고 자주 발생하였다. SPC500 주가지수 변동성의 Bipower, Tripower, Quad-power, Min RV와 Med RV 등을 사용하여 여러 점프통계량을 추정하고 검정한 결과, 2004년, 2006년, 그리고 2008년경에 점프 통계량이 종종 상당히 크게 나타나고 있으며 2010년 전후에도 매우 큰 점프 통계량을 보이고 있으며 2000년 1월부터 2010년 9월말 까지 거의 전 기간에 걸쳐 유의한 불연속적인 점프가 발생하고 있으며, 대체로 10일 혹은 2주 전후에 한 번씩 유의한 점프가 발생하였다.

Keywords 비모수적 변동성 추정, 실현된 파워 변동성, 점프통계량, 점프 확률

JEL Classification G10, G30

* 이 논문은 2009년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2009-327-B00138).

† 부산대학교 국제전문대학원 교수, 이메일 주소 givethanks@pusan.ac.kr

1. 서론

최근 10년간 금융자산시장의 수익률 및 가격 변동성(volatility)은 금융경제학 관련부문에 가장 중요한 연구분야가 되어 왔고 그 중 최대관심사는 금융자산 가격이 연속적인(continuous) 변동과정을 가지고 있는지 혹은 불연속적인(discontinuous) 변동과정 즉 점프(jumps)를 가지고 있는지 하는 점이다. 2000년대 초까지 많은 경제금융학자들이 이러한 금융변수들의 변동성(volatility)을 설명하기 위하여 ARCH모델과 GARCH 모델, 확률적 변동성(stochastic volatility) 모형같이 주로 순간적인 instantaneous) 변동성에 대해 명시적인 함수형태를 기초로 하고 있는 모수추정(parametric estimation)방법에 의해 변동성 추정을 해왔다. 금융시장의 변동성과 점프에 대해 Andersen Bollerslev(1988b), Andersen, Bollerslev, Diebold 그리고 Vega(2003), Chernov, Gallant, Ghysels and Tauchen(2003), Eraker(2004), Eraker, Johannes and Polsen(2003), Pan(2002), 그리고 Johannes(2004) 등은 모수적 추정방법을 사용하여 분석을 하였다.

그러나 금융자산가격의 모수적 추정방법은 시장의 미시적 교란 구조와 변동성의 불연속적인 점프의 존재 등으로 인해 다음과 같은 심각한 문제점들을 가지고 있다. 첫째, 첫째, 여러 가지 행사가격에서 잘못 설정된 모델로 인하여 블랙-숄즈 옵션모형으로 설명할 수 없는 옵션가격변동성이 현실적으로 많이 존재하고, 1990년대 이래 현재에도 많이 사용하고 있는 금융자산가격의 모수적 추정방법의 양대 산맥인 GARCH모형과 확률적 변동성(stochastic volatility) 모형은 근본적으로 정확하지 않은 모델설정의 오류(misspecification) 가능성을 많이 가지고 있다.

둘째, 연속적인 시간모형을 사용하는 모수(parametric) 추정적인 연구접근법은 점프발산(jump diffusion)모형을 추정하기가 매우 어렵다. 또한 특정한 모수 추정적인 변동성모형들은 고빈도 자료들을 사용하여 직접 추정해내고 계산하는 것이 매우 어렵고 복잡할 뿐만 아니라 저빈도 자료에 의한 모수추정모형은 금융자산시장의 미시적구조의 복잡성들을 그 모형에 적절하게 통합하는 것이 너무 어렵다.

셋째, 금융자산시장의 변수들이 일중에도 종종 많은 불연속적인 변동 혹은 점프들을 보이고 있는데, 저빈도 자료를 사용하는 이러한 모수추정적인 연구접근법은 점프 변동을 명확히 설명해내지 못한다. 특히 고빈도 표본자료에는 환율이나 금융자산가격에 점프가 존재하며, 거시경제뉴스의 발표와 기업에 대한 중요한 정보의 도착은 자산가격의 즉각적이고 불규칙적인 이산적인 점프를 발생시키지만, 기존의 저빈도 자료를 이용한 기존의 GARCH 모형이나 확률적 변동성 모형에 의한 변동성 접근법으로는 이러한 불연속적인 점프 변동성 분석이 거의 불가능하다.

그리하여 이러한 불규칙적이고 불연속적인 점프 변동성을 규명하기 위한 새로운 변동성 접근법으로 최근 2000년대 초부터 1분간 혹은 5분간의 일중 및 일간 초고빈도자료를 사용하여 비모수 추정적인(nonparametric) 연구접근법을 시도하고 있다. Andersen, Bollerslev, Diebold 그리고 Labys(2001, 2003), Andersen, Bollerslev, Diebold(2002, 2004), Bandorf-Nielsen과 Shephard(2001, 2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006) 등이 빈번한 주기의 표본의 자승수익률을 함함으로써 사후적인 자산변동을 측정하여 실현된 변동성(realized volatility)이란 개념을 도입하여, 기존 모수적 변동성추정

방법에 대한 대안이자 새로운 연구접근방법으로서 비모수적 변동성추정 연구접근법을 창안하였다. Andersen과 Bollerslev(1998b), Andersen et al.(2001a, 2001b, 2007), Bandorf-Nielsen과 Shephard (2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006)등은 고빈도 자료를 사용하여 실현된 변동성을 사용하는 비모수적 추정방법을 시도하고 있다.

또한 Andersen과 Bollerslev(1998a), Andersen, Bollerslev, Diebold 그리고 Labys(2001, 2003), Bandorff-Nielsen과 Shephard(2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006), Andersen, Bollerslev, Diebold(2004, 2007) 등은 실현된 bipower 변동(variation)이란 개념을 최초로 고안하여 금융자산가격의 변동성을 연속적인 부분과 불연속적인 점프부분으로 분리해서 연구하기 위하여 시작하였다. 그리하여 이들은 실현된(realized) 변동과 결합하여 직접적인 비모수적인 추정방법에 의해 금융자산가격의 총변동분을 연속적인 변동과 불연속적인 변동인 점프부분 2가지로 나누어 분석하기 시작하였다.

최근에는 Bandorff-Nielsen과 Shephard(2004a, 2004b, 2006) 등이 개발한 실현 변동성 측정치의 단점을 극복하여, Andersen, Dobrev, and Schaumburg(2008) 등은 bipower 변동(variation)대신에 좀더 건정성(robustness)을 가질 수 있도록 최소 실현된 변동(Min RV)와 최빈 실현된 변동(Med RV) 등의 새로운 대안적인 점프변동성을 개발하기 시작하고 있다.

이와 같이 실현변동성과 파워변동성 접근법에 대한 금융자산의 변동성 연구는 최근 2000년대 들어 극소수의 외국학자들 사이에서 초기적으로 연구가 시도되고 있지만, 아직 이런 실현변동성과 파워변동성 접근법을 통한 주가지수 등의 연속적 변동과 불연속 점프에 대한 국내연구는 거의 없으며 비모수적 접근법을 통한 파워변동성과 불연속적 점프통계량 등에 관한 개념조차 아직 국내에 거의 소개되어 있지 않다¹⁾. 그러나 이러한 비모수적인(nonparametric) 변동성 추정방법은 일종의 분단위 등의 고빈도자료들을 변동성측도에 효율적으로 도입함으로써, Andersen, Bollerslev, Diebold(2004, 2007) 등은 기존의 아주 복잡한 모수적인(parametric) 변동성추정방법보다 우월한 실증분석결과를 일반적으로 보여주고 있다²⁾.

그리하여 본 연구는 중요한 주가지수의 하나인 미국 SPC500 주가지수에 대해 세계적으로 볼 때 최근에 개발되기 시작한 변동성 분석이론과 기법인 실현된 변동성을 사용하여 파워변동성과 변동성 점프, 그리고 변동성 점프가 불연속적으로 발생할 확률을 초고빈도 유상자료를 이용하여 비모수적 점프변동성과 점프발생확률을 추정하려고 한다.

본 연구는 다음과 같은 연구내용과 주안점을 가지고 수행한다. 첫째, 주식시장에서 일반적인 연속적 변동성개념으로 잘 분석할 수 없는 불규칙하고 급격한 변동, 즉 변동성에 불연속적인 점프가 존재하는데, 확률적 변동성(stochastic volatility) 등의 연구접근법들은 불규칙 점프가 있는 경우를 분석하고 규명하기는 매우 힘들기 때문에 본 연구는 비모수적 변동성 접근법을 택한다.

둘째, 기존의 모수추정적인 연구방법들이 주로 저빈도 자료인 분기간, 월간, 주간, 일간 자료를 사용해왔지만 이러한 저빈도 자료에 의한 분석은 일중 매일매일 시시각각으로 일어나는 주식시장에서 자산가격과 수익률의 변동성을 규명할 수 없다. 그래서 본 연구는 일중의 초고빈도 주가지수의

1) Yi(2011)는 주가가 아닌 고빈도 환율변동에 대한 분석을 하고 있다.

2) 모수적 ARCH 모형은 기대 변동성을 이산적으로 관측된 수익률의 명시적인 함수, 즉 모수화된 조건부 기대치의 함수로 고안된 모형인데 반해, 비모수적 변동성 측정은 어떤 특정한 함수에 대한 가정 없이 직접 사후적으로 실증적인 평가를 한다.

변동성을 분석하기 위하여 실현변동성을 사용하여 가장 중요한 주가지수의 하나인 미국 SPC500 주가지수에 대해 최근 2001년-2010년 동안의 5분 간격의 초고빈도 자료(ultra-high frequency data) 총 208,054개에 달하는 SPC500 주가지수 관측치를 사용하여 점프 통계량과 점프 발생확률을 추정한다.

셋째, 본 연구는 현재 개발되기 시작한 실현변동성과 Bipower 변동성, Tri-power Quarticity 변동성, Quad-power Quarticity 변동성 등의 Multi-power 변동성 등을 이용하여 SPC500 주가지수에 대한 변동성과 불연속적 점프에 대한 실증적 연구를 한다.

넷째, 극히 최근인 2008년 불연속적인 점프변동성을 규명하고 좀 더 건전한(robust) 추정량을 구하기 위하여 최빈 실현 변동치(Med RV)와 최소 실현 변동치(Min RV) 등을 사용한 점프 통계량을 개발하기 위해 시도되고 있는데, 본 연구 역시 국내에서 처음으로 위의 점프 변동성뿐만 아니라, 이러한 최빈 실현 변동치(Med RV)와 최소 실현 변동치(Min RV)에 의한 주가의 점프발생확률도 추정한다.

다섯째, Bandorf-Nielsen과 Shephard(2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006)의 변동성 이론과 Andersen, Bollerslev, Diebold(2004, 2007)의 실증연구 등을 기초로 하여 기존 연구들에서 더 나아가, 본 연구는 비모수적 여러 가지 점프통계량을 먼저 설정한 후, 이 점프통계량에 의해 미국 SPC500 주가지수에 심각한 점프발생의 유무와 점프 발생확률 및 점프 발생빈도를 추정하고 비교할 것이다.

2. 실현 변동성 점프 분석모형

2.1. 실현 변동성(realized volatility) 모형

실현 변동성 모델을 설정하기 위하여 본 연구에서는 순간적인 정보 메커니즘을 가진 연속적 호가와 거래를 하는 주식시장에서의 자산가격의 로그 가격을 $p(t)$ 라고 가정하고, 일종의 주가수익률을 다음과 정의한다.

$$dP(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \kappa(t)dq(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

$$r_{t,j} = P(t-1 + \frac{j}{M}) - P(t-1 + \frac{j-1}{M}), \quad j=1,2, \dots, M. \quad (2)$$

(1)식에서 $\mu(t)$ 는 국지적으로 연속적인 한계가 있는 변동과정, $\sigma(t)$ 는 순간적인 변동성, $W(t)$ 는 표준적인 브라운 운동(Brownian Motion), $\kappa(t)$ 는 τ 기의 점프 혹은 점프변동의 크기를 나타내는 것으로 순수한 점프 Levy 과정(process)을 γ_j 로 나타낼 때, $\gamma_j(t) - \gamma_j(s) = \sum_{\tau} \kappa(\tau)$, $s \leq \tau \leq t$ 가 성립한다. 점프가 일어나는 회수를 나타내는 과정을 $dq(t)$ 로 표시하고 t 기에 점프가 발생하면 1, 발생하지 않으면 0으로 나타낸다³⁾. (2)식에서는 시간단위는 일간(daily) 단위를 상정하며, 정수 t 에 대하여 일종의 수익률(intraday return)을 나타내면, M 은 관측된 일중 표본의 주기(sampling frequency)를 나타낸다.

3)Yi(2001) 참조.

본 연구에서는 Bandorf-Nielsen과 Shephard(2004a), 그리고 Bollerslev, Kretschmer, Piorsch, Tauchen (2005) 등의 연구에서와 같이, 일종의 수익률의 자승근의 합을 이용하여 실현된 자승 변동 (realized quadratic variation)을 도출하여 이것을 실현된 변동(realized variation) 혹은 실현된 변동성 (realized volatility)으로 정의하면, t일의 실현된 변동의 추정치는 다음과 같이 RV_t 로 나타난다.

$$RV_t = \sum_{j=1}^M r_{t,j}^2, \quad j=1, 2, \dots, M. \quad (3)$$

따라서 일종의 수익률 표본을 매우 빈번하게 구하여 더함으로써 실현된 변동성을 내재하는 적분된 변동성(integrated volatility)으로 나타내므로 당연히 변동성 척도로 사용할 수 있다. 특히 실현된 변동은 일반적으로 표본의 주기 M이 클 때, Andersen과 Bollerslev, 그리고 Diebold(2002, 2007)의 연구와 같이 적분된 변동(integrated variance)의 크기를 나타내는 연속적인 $\int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds$ 와 불연속적인 점프부분을 포함한 총 수익률 변동의 사후적인 추정치의 합으로써, 불연속적인 점프가 존재할 때 확률적으로 다음과 같이 접근해간다. (4)식에서 N_t 는 어느 특정한 t일의 수익률 점프변동의 수를 나타내고 $\kappa_{t,j}$ 는 t일의 점프변동의 크기를 나타낸다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} RV_t = \int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds + \sum_{j=1}^{N_t} \kappa_{t,j}^2. \quad (4)$$

본 연구에서는 연속적인 변동분과 점프 변동분을 구분하기 위하여 Bandorf-Nielsen과 Shephard (2004a, 2004b, 2006)가 도출한 Bipower 변동의 추정치(BV_t)를 원용하여 Bipower 변동을 다음과 같이 정의되며, Bipower 변동은 표본의 주기를 아주 많이 세분하여 M의 크기를 크게 증가시키면, 다음과 같이 적분된 변동치로 확률적으로 접근해간다.

$$BV_t = \mu_1^{-2} \left(\frac{M}{M-1} \right) \sum_{j=2}^M |r_{t,j-1}| |r_{t,j}| = \frac{\pi}{2} \left(\frac{M}{M-1} \right) \sum_{j=2}^M |r_{t,j-1}| |r_{t,j}|,$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} BV_t = \int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = E(|Z|), \quad Z \sim N(0,1). \quad (5)$$

이와 같이 수익률의 Bipower 변동(BV_t)은 점프들의 영향을 받지 않는 적분된 변동의 일치추정량이 되므로 ($RV_t - BV_t$)는 순수한 점프 변동분의 일치추정량이 되며, 실현된 총변동과 실현된 Bipower 변동의 차이분은 총가적 변동분에 대해 점프부분 차지하는 비모수적 추정량으로 할 수 있다. 그리하여 실현된 점프는 실현된 변동과 적분된 변동(integrated variation)의 추정치의 차이로서 다음과 같이 표시된다.

$$RJ_t(\Delta) \equiv RV_t(\Delta) - \widehat{IV}_t(\Delta) \rightarrow \sum_{t-1}^t \kappa^2(s). \quad (6)$$

Bipower 실현 변동의 추정치(BV_t)나 임의의 일치추정량으로서 위식에서 $\widehat{IV}_t(\Delta)$ 는 적분된 변동(integrated variation)의 추정치로 이용된다. 금융자산 가격의 변동성에 점프가 없고 표본주기 M이 무한대로 갈 때, Bandorf-Nielsen과 Shephard (2006) 연구를 원용하면 실현변동성(RV_t)와 실현된

Bipower 변동성(BV_t)의 두 변동성의 결합 점근분포는 다음과 같이 도출된다.

$$M^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t-1}^t \sigma^4(s) ds \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} RV_t - \int_{t-1}^t \sigma^2(s) ds \\ BV_t - \int_{t-1}^t \sigma^2(s) ds \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{N} \left(0, \begin{pmatrix} v_{qq} & v_{qb} \\ v_{qb} & v_{bb} \end{pmatrix} \right), \quad (7)$$

$$\text{여기서 } \begin{pmatrix} v_{qq} & v_{qb} \\ v_{qb} & v_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_4 - \mu_2^2 & 2(\mu_3\mu^{-1} - \mu_2) \\ 2(\mu_3\mu^{-1} - \mu_2) & (\mu_1^{-4} - 1) + 2(\mu_1^{-2} - 1) \end{pmatrix},$$

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \mu_4 = 3, v_{qq} = 2, v_{qb} = 2, v_{bb} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \pi - 3.$$

점근적으로 $v_{qb} = v_{qq}$ 의 경우는 가우시안 오차항의 경우이며, RJ_t는 통합변동 $\int_{t-1}^t \sigma^2(s) ds$ 의 가장 효율적인 추정량이 된다. 본 연구에서 $RV_t - BV_t$ 로 환율변동성의 점프에 대한 조건부 표준편차의 크기를 결정할 때는 Andersen과 Bollerslev, 그리고 Diebold(2004), Bandorf-Nielsen과 Shephard(2004a, 2004b) 등이 맨 처음으로 실현된 Tri-Power Quarticity(TP_t) 통계량과 Quad-power Quarticity(QP_t) 통계량을 사용한다.

$$TP_t = M_{\mu_{4/3}}^{-3} \left(\frac{M}{M-2} \right) \sum_{j=3}^M |r_{t,j-2}|^{4/3} |r_{t,j-1}|^{4/3} |r_{t,j}|^{4/3} = TP_t = \int_{t-1}^t \sigma^4(s) ds, \quad (8)$$

$$\mu_{4/3} \equiv 2^{2/3} \Gamma(7/6) \Gamma(1/2)^{-1} = E(|Z|^{4/3}).$$

$$QP_t = M_{\mu_1}^{-4} \left(\frac{M}{M-3} \right) \sum_{j=4}^M |r_{t,j-3}| |r_{t,j-2}| |r_{t,j-1}| |r_{t,j}|. \quad (9)$$

2.2. Tri-Power Quarticity와 Quad-power Quarticity 점프 통계량 추정

본 연구에서는 주가 수익률에 비정상적인 변동 즉 점프 발생여부를 추정하기 위하여 Bandorf-Nielsen과 Shephard(2006) 연구를 원용하여 실현된 변동과 Bipower 변동을 사용하여 다음과 같이 일간 점프 통계량을 사용한다.

$$Z_t = \frac{RV_t - BV_t}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} IQ_t}} \quad (10)$$

위식에서 $IQ_t \equiv \int_{t-1}^t \sigma^4(s) ds$ 로 정의된다. Andersen과 Bollerslev, 그리고 Diebold(2007)의 연구와 같이 IQ_t 를 추정하기 위하여 앞에서 정의한 Tri-Power Quarticity(TP_t)와 Quad-power Quarticity(QP_t) 추정치를 각각 사용하여 다음과 같은 일간 점프를 측정하는 검정통계량을 사용한다.

$$Z_{TP,t} = \frac{RV_t - BV_t}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} TP_t}} , \quad Z_{QP,t} = \frac{RV_t - BV_t}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} QP_t}} \quad (11)$$

M이 무한대로 갈 때, 점프가 없다면 각 t일에 있어 $Z_{TP,t} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ 이 되며 시계열 $\{Z_{TP,t}\}_{t=1}^T$ 는 자산가격변동에 있어 일간 점프의 발생을 나타내준다.

그러나 (11)식에 의해 정의된 점프통계량은 큰 임계수준(critical value)에서 점프가 없다는 귀무가설을 조금 과도하게 기각하는 경향을 가진 단점이 있으므로, Andersen, Bollerslev, Diebold와 Labys(2001, 2003a), Andersen, Bollerslev, Diebold(2004), Bandorf-Nielsen과 Shephard(2005a, 2005b) 연구에서와 같이 유한표본(finite samples)의 검정력을 높이기 위해 로그 환율변동을 이용하여 다음과 같은 점프 통계량을 구한다.

$$Z_{LTP,t} = \frac{\log(RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} \frac{TP_t}{BV_t^2}}} , \quad Z_{LQP,t} = \frac{\log(RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} \frac{QP_t}{BV_t^2}}} \quad (12)$$

한편, Bandorf-Nielsen과 Shephard(2005a, 2006)의 연구에서와 같이 위의 두 가지의 통계량을 다시 최대로 조정된 로그 점프 통계량을 사용함으로써 표준정규분포에 더욱더 근접하는 장점을 가진 점프 통계량을 분석한다.

$$Z_{MTP,t} = \frac{\log(RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} \max(1, \frac{TP_t}{BV_t^2})}} , \quad (13)$$

$$Z_{MQP,t} = \frac{\log(RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} \max(1, \frac{QP_t}{BV_t^2})}} . \quad (14)$$

이러한 점프 통계량들은 t일에 있어 점프가 없다는 귀무가설하에서 M이 무한대 혹은 $\Delta \rightarrow 0$ 으로 수렴해가는 초고빈도 자료에서는 위의 모든 점프통계량은 점근적으로 표준화된 정규분포로 접근해간다.

2.3. Min RV 점프통계량과 Med RV 점프통계량 추정

그러나 위의 점프모형은 수익률이 0으로 나타날 때, 건진성에 대한 약점이 있는데 최근 통합 변동성(integrated volatility)에 대한 두개의 건진한(robust) 추정량을 Andersen, Dobrev, and Schaumburg (2008)이 다음과 같이 최소 실현된 변동(Min RV)과 최빈 실현된 변동(Med RV)을 개발하였는데, 본 연구는 점프통계량의 건진성 추정을 위해 도입하여 분석해본다.

$$Min RV_t = \mu_5 \left(\frac{M}{M-1} \right) \sum_{i=2}^M Min(|r_{t,i}|, |r_{t,i-1}|)^2 \quad (15)$$

$$Med RV_t = \mu_6 \left(\frac{M}{M-2} \right) \sum_{i=3}^M Med(|r_{t,i}|, |r_{t,i-1}|, |r_{t,i-2}|)^2 \quad (16)$$

여기서 $\mu_5 \equiv \pi / (\pi - 2)$, $\mu_6 \equiv \pi / (6 - 4\sqrt{3} + \pi)$, Min은 최소값을 나타내고, Med는 최빈값을 나타낸다. Med RV는 BV보다 영(zero) 수익률에 덜 노출되어 있기 때문에 좀 더 건전한 추정량이 될 수 있다. 이제 위의 Min RV와 Med RV를 위에서 구한 점프통계량들에 대입하면 다음과 같은 점프통계량들을 구할 수 있는데 본 연구에서 이와 같은 점프 통계량을 구하고 점프확률을 구해본다.

$$\text{Min } Z_t = \frac{\text{Min } RV_t - BV_t}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} IQ_t}} \quad (17)$$

$$\text{Min } Z_{LTP,t} = \frac{\log(\text{Min } RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} IQ_t}} \quad (18)$$

$$\text{Min maxLog } Z_t = \frac{\log(\text{Min } RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} \max(1, \frac{\int_{t-1}^t \sigma^4(s) ds}{BV_t^2})}} \quad (19)$$

$$\text{Med } Z_t = \frac{\text{Med } RV_t - BV_t}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} IQ_t}} \quad (20)$$

$$\text{Med } Z_{LTP,t} = \frac{\log(\text{Med } RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} IQ_t}} \quad (21)$$

$$\text{Med maxLog } Z_t = \frac{\log(\text{Med } RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{(v_{bb} - v_{qq}) \frac{1}{M} \max(1, \frac{\int_{t-1}^t \sigma^4(s) ds}{BV_t^2})}} \quad (22)$$

한편, 여러 점프 중에서 어떤 점프가 통계적으로 유의한 점프(significant jump)인지 결정하기 위해 위의 각종 점프의 통계량($Z_t(\Delta)$)이 특정 임계치(critical value)를 초과하는 점프를 유의한 점프라고 다음과 같이 규정한다.

$$J_{t,\alpha}(\Delta) \equiv I[Z_t(\Delta) > \Phi_\alpha][RV_t(\Delta) - \widehat{IV}_t(\Delta)]. \quad (23)$$

위 식에서 $I[Z_t(\Delta) > \Phi_\alpha]$ 는 인디케이터 함수(indicator function)로서 t일에 있어 α (예를 들면 $\alpha = 0.999$) 유의수준(significance level)에서 점프가 탐지된다면 1이 되고 그렇지 않으면 0이 된다.

3. 통계자료와 실증분석

3.1. 표본과 통계자료

본 연구에서 사용한 주가 통계자료들은 극히 최근에서야 스위스 쥐리히의 Olsen and Associates에서 제공하는 비싼 유상자료를 사용하여 초고빈도 주가지수 중 대표적인 주가지수인 미국의 SPC500 주가지수를 사용하였다.

본 연구에서 사용한 자료의 기간은 2000년 1월 3일부터 2010년 9월 30일까지의 SPC500 주가지수의 초고빈도 자료인 일중(within-day)의 5분 자료 (하루에 77개의 5분 자료, 즉 $M = 77$, $\Delta = 1/77$)를 사용하였고, 일중내 5분간의 주가지수 수익률을 로그 주가지수의 차이로 표시하였다.

그러나 이 가운데 일반적인 주가지수 분석에서와 마찬가지로 특정 공휴일 기간들인 크리스마스(12월 24일-26일), 새해 연휴(12월 31일-1월 2일), 미국의 독립기념일인 7월 4일, 부활절 월요일, 현충일, 노동절, 추수감사절 휴일 등을 제외하였다. 또한 자료의 신빙성을 높이기 위해 기록오류로 볼 수 있는 경우와 관측이 이루어지지 않은 날들을 표본에서 제외하여 총 관측일수는 2,702일을 채택하였다. 그리하여 SPC500 주가지수의 5분간의 수익률은 $r_{t+\Delta, \Delta}$, $t = \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots, 2702$ 로 표시되며 5분간의 누적 수익률로 이루어진 일간 SPC500 주가지수 수익률은 $r_{t+1} \equiv r_{t+1,1} \equiv r_{t+\Delta, \Delta} + r_{t+2\Delta, \Delta} + \dots + r_{t+1, \Delta}$, $t = 1, 2, \dots, 2,702$. 따라서 본 연구에서 미국 SPC500 지수에 대해서 표본의 총 관측치 개수가 $2,702(\text{일}) \times 77(\text{일중 5분간 자료개수}) = 208,054$ 개에 달하는 5분간의 고빈도 SPC500 주가지수 관측치를 사용하였다.

3.2. 실증분석 결과

가. 주가지수와 실현된 수익률과 변동성 점프 기초통계량

<표1-1>은 2000년 1월 3일부터 2010년 9월 30일까지의 2,702일 동안의 미국 SPC500 주가지수의 기초 통계량을 보여주고 있다. <표1-1>의 둘째 줄은 근 10년 동안 SPC500 주가지수의 최소값 667.04, 평균 1,182.2, 최대값 1,576, 그리고 표준편차 192.4등을 나타내어 변동성이 심하게 나타났음을 알 수 있다. <그림1>에서 SPC 500주가지수의 변동을 보면 2000년부터 2003년까지 대체로 하락한 후 금융위기 전인 2007년 말까지 상승하였다가. 2007년 말 금융위기 후 2009년 상반기까지 급격히 하락하였다가, 2010년 9월까지 조금씩 상승하였던 것을 알 수 있다.

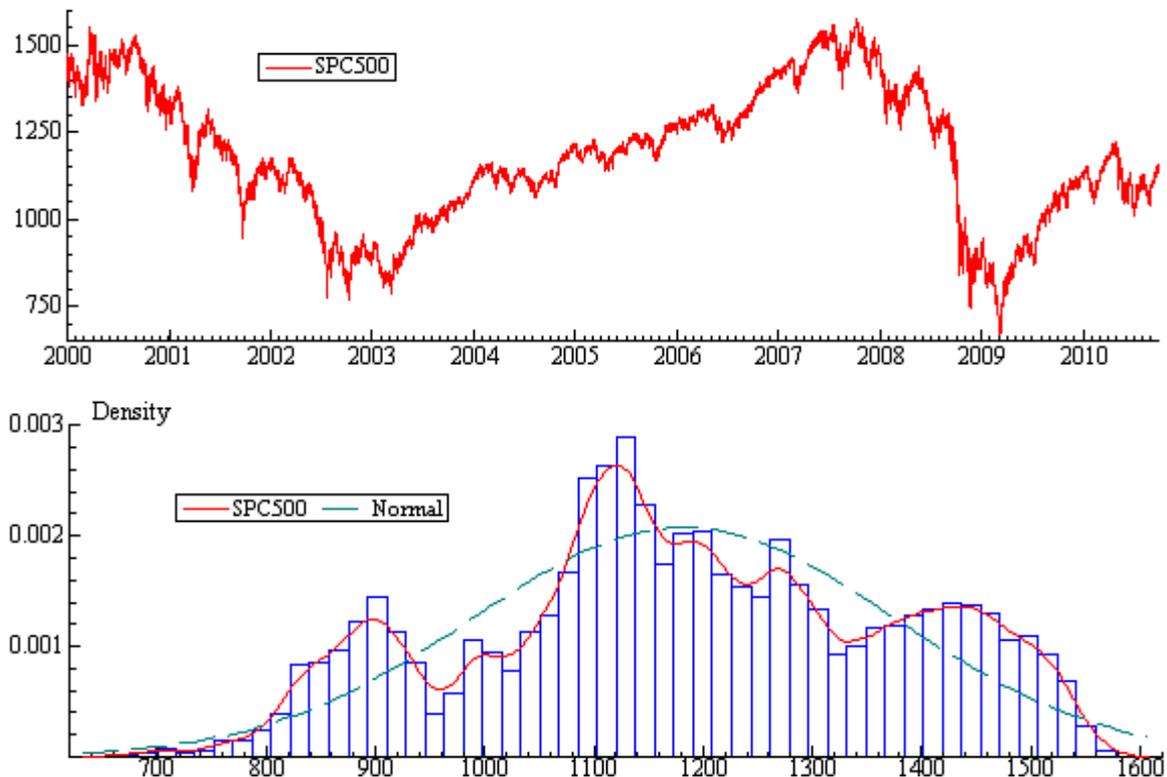
<표1-1>에서 정규분포 검정결과 1%와 5% 유의수준에서 왜도(Skewness)를 보면 왼쪽으로 치우쳐 있으며, 첨도(Kurtosis)는 정규분포보다 뾰족하지 않게 나타났고, Jarque-Berra 통계량 역시 정규분포하지 않는 것으로 나타났다.

<표 1-1> SPC 500 지수의 기초통계량

변수	관측치	최소값	평균	최대값	표준편차
SPC 500	208,054	667.04	1182.2	1576	192.4
a. Normality Test(정규성 검정)					
	통계량	t-값	P-값		
Skewness	-0.088642	16.631	4.1460e-062		
Excess Kurtosis	-0.74040	69.458	0.00000		
Jarque-Bera	5100.9	.	0.00000		
b. Q-통계량					
Q(5) = 1.05583e+006 [0.0000000]**					
Q(10) = 2.11128e+006 [0.0000000]**					
Q(20) = 4.22105e+006 [0.0000000]**					
Q(50) = 1.05412e+007 [0.0000000]**					
C. Unit Root Test(단위근 검정)					
ADF test: Statistics: -0.780947(12), -0.793883(4)					
SCHMIDT-PHILLIPS Test: -6.05809(12), -6.04574(4)					

주)Q-통계량에 있어서 귀무가설은 시계열상관이 없다는 것이고, Q-통계량과 단위근 검정통계량의 괄호안의 값들은 래크시차를 나타낸다. 단위근을 검정하는 ADF 검정과 Schmidt-Phillips 검정의 점근적 임계치는 1(5)% 유의수준에서 -2.56572(-1.94093)와 -25.2(-18.1)를 각각 가지고 있다.

이러한 특징은 <그림1>에서 SPC500 주가지수의 히스토그램과 정규분포와 비교한 분포곡선을 보면 정규분포와 상당히 다르게 나타난 것으로 확인할 수 있다. <표1-1>에서 또한 SPC500 주가지수의 오차항의 자기상관을 q 통계량으로 조사한 결과 시차 5, 10, 20, 그리고 50개 모두의 자기상관계수가 0이라는 귀무가설을 1% 유의수준에서 기각하고 있으므로 SPC500 주가지수는 자기상관이 나타남을 알 수 있다.



<그림 1> SPC500의 변동과 정규분포와의 비교

<표1-2>는 SPC500 주가지수의 2000년 1월 3일부터 2010년 9월 30일까지의 2,702일 동안의 실현된 수익률과 변동성 점프 통계량을 보여주는 것으로 일중 5분 간격의 77개의 누적수익률의 통계자료를 나타내 준다. RR은 먼저 실현된 SPC500 주가지수의 수익률을 나타내며, RV는 실현된 수익률의 변동 혹은 수익률의 분산을 나타내는 것은 실현된 변동성(realized volatility)을 나타내며, BV는 실현된 bipower 수익률의 변동성을 나타낸다. RJ_BV는 bipower를 사용하였을 때 SPC500 주가지수의 수익률의 실현된 점프를 나타내며, RJ_Stat는 Tripower를 사용했을 때의 (14)식에서 정의된 점프통계량을 나타낸다. 위의 통계량 중에서 평균(mean)을 보면 점프통계량인 RJ_Stat를 제외하고는 모두 수익률의 통계량으로서 예상했던 대로 평균이 0에 가깝게 나타나고 있다.

<표1-2> 실현된 수익률, 실현된 변동성과 실현된 점프의 기초통계량

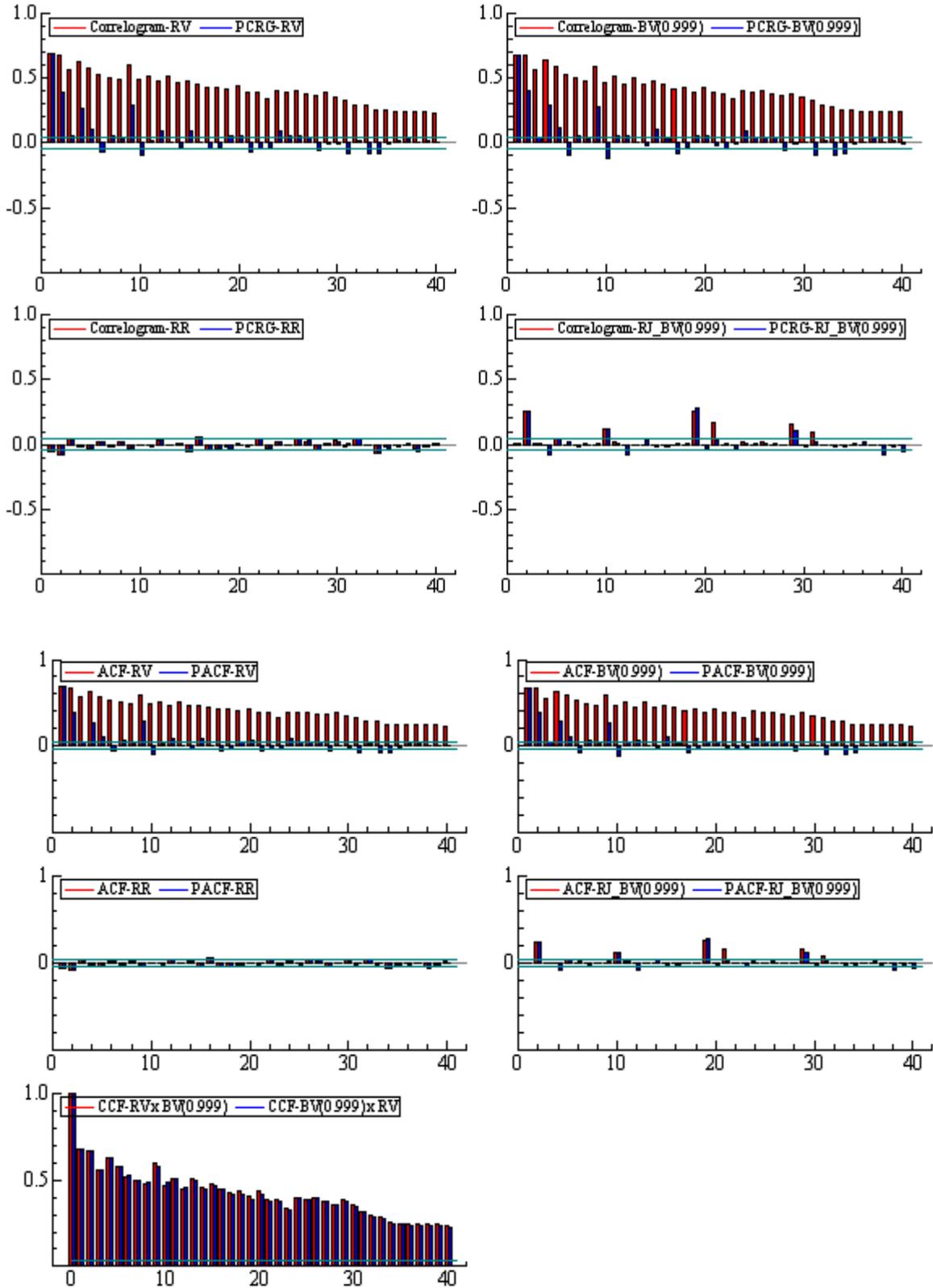
변수	관측값수	최소값	평균	최대값	표준편차
RR	2702	-0.081879	-0.00019639	0.07431	0.011471
RV	2702	2.8124e-006	0.00011562	0.0057833	0.00024127
BV(0.999)	2702	2.8124e-006	0.00011317	0.0057833	0.00023814
RJ_BV(0.999)	2702	0	2.4557e-006	0.00062376	1.8088e-005
RJ_Stat	2702	-2.0399	1.0049	12.143	1.5335

주) 괄호안의 값은 유의수준을 의미한다.

<그림2> 중 위의 네 그래프들은 각각 SPC500 주가지수의 RV, BV, RR, 그리고 RJ_BV의 상관도표(correlogram)과 부분 상관도표(partial correlogram)을 나타내고, 아래의 네 그래프들은 그들 각각의 자기상관(autocorrelation) 함수의 그래프와 부분상관(partial autocorrelation) 함수의 그래프들을 각각 나타내고, 맨 아래의 그래프는 RV와 BV의 교차상관(cross-correlation) 그래프를 나타낸다.

<그림2>에서 자기상관도표Correlogram)와 부분상관도표(PCRG)를 보면, 먼저 RV와 BV는 단기간에는 자기상관성이 나타나고 있지만, 실현된 주가수익률(RR)은 시차 40에서 1-2개의 약한 자기상관성을 제외하고는 거의 자기상관성이 없으나 변동성 점프(RJ_BV)는 간혹 시차 2, 10, 18 등에서 자기상관성이 나타나고 있지만 다른 시차에서는 역시 자기 상관성이 나타나지 않았다.

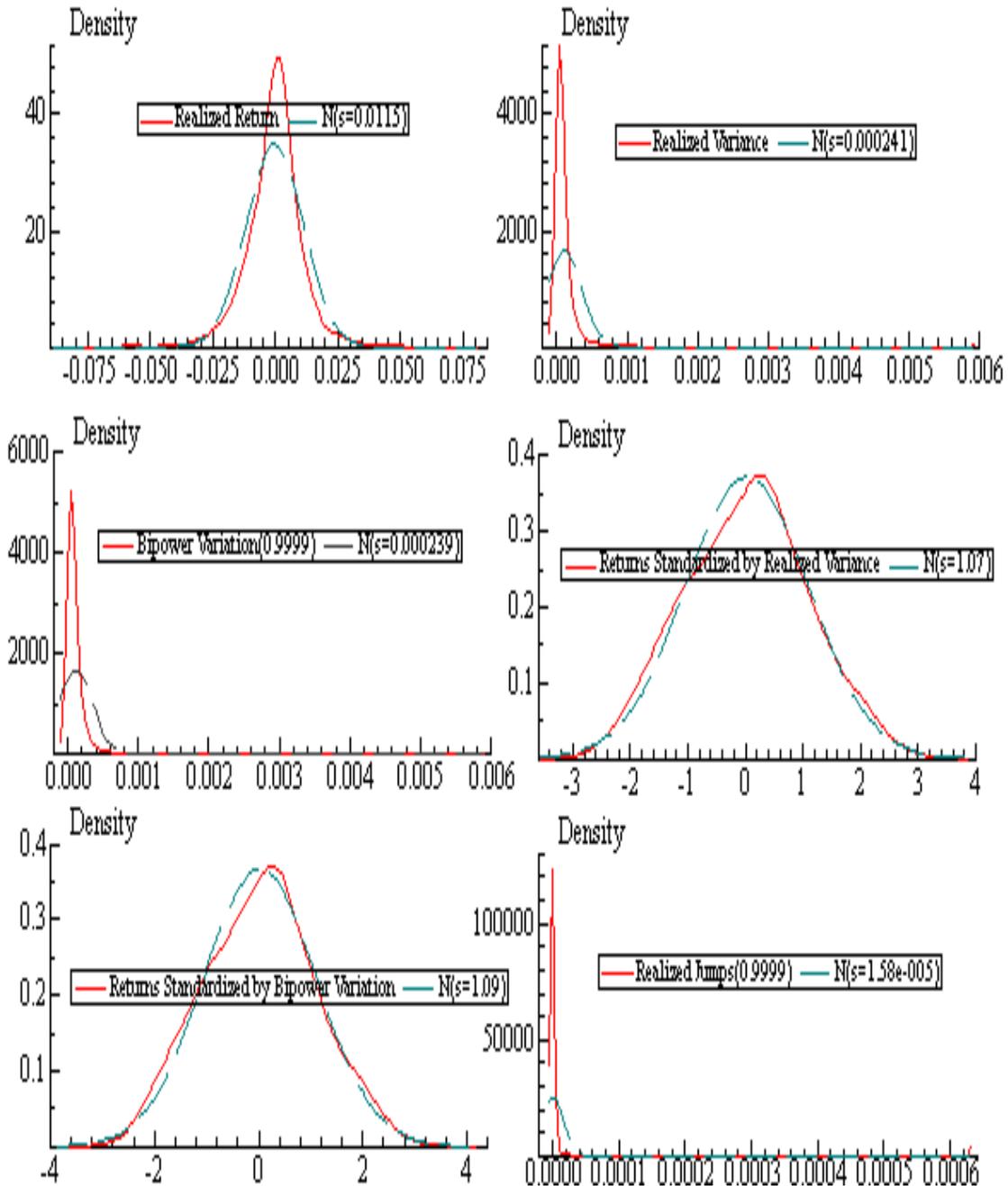
그리고 자기상관함수(ACF)와 부분 자기상관함수(PACF)들의 그래프를 보면 위에서와 마찬가지로 역시 RV와 BV는 단기간에 자기상성이 강하게 나타나고 있지만, 실현된 수익률(RR)은 자기상관성이 거의 없고 변동성 점프(RJ_BV)는 가끔 나타나고 있다. 이것은 변동성이 아주 클 때 변동성 집중현상 때문에 발생하기 때문이다. <그림1-2>의 제일 마지막 그래프에서는 RV와 BV의 교차상관(CCF) 그래프를 나타내고 있는데 역시 단기간에는 상관관계가 매우 높다가 시차가 길어질수록 장기간에 걸쳐서는 상관관계가 조금씩 감소해가는 것으로 나타났다.



<그림 2> Correlogram, Partial Correlogram과 교차상관함수(Cross-Correlation Function)

나. 밀도함수 분포

미국 SPC500 주가지수의 실현된 수익률의 변동성을 밀도함수를 구하여 나타내면 <그림3>과 같다. <그림3>의 제일 위쪽의 좌측 그림에서 실선은 SPC500 주가지수의 실현된 수익률의 확률밀도함수를 나타내고 점선은 정규분포의 확률밀도함수를 나타낸다⁴⁾.



<그림 3> 밀도함수(Density Functions)

4) <그림 3>에서 각 밀도함수의 괄호 안 값은 유의수준을, N은 정규분포, 괄호안의 s는 표준편차를 나타낸다.

<그림1-3>에서 나와 있듯이 SPC500 주가지수의 실현된 수익률의 확률밀도함수는 정규분포의 확률밀도보다 보다 뽀족한 첨도를 가지고 있으며 두꺼운 꼬리를 가지고 있는 전형적인 금융시계열 모습을 보이고 있다. 그리고 제일 위쪽의 오른쪽 그림과 중간의 좌측 그림은 각각 수익률의 실현된 변동(RV)과 실현된 bipower 변동(BV)의 확률밀도함수가 나타나 있는데 이 두 분포 모두 정규분포보다 뽀족하게 나타나 있다.

그러나 위의 두 분포를 실현된 변동(RV)으로 표준화한 분포에서는 중간의 우측 그림과 제일 밑의 좌측 그림에서 나타난 것과 같이 실현된 변동과 bipower 변동에 의해 표준화된 그래프들에서는 정규분포와 다소 비슷하게 나타 있다. 제일 밑의 좌측에 나타난 실현된 점프는 정규분포보다 상당히 0의 값 주변에 밀집되어 분포되어 있어 점프가 간혹 일어난다는 것을 알 수 있다.

다. 실현된 수익률과 실현 변동성 분포

1) 실현된 수익률

<표2>의 윗부분에서 실현된 수익률(RR)을 보면 정규분포 검정결과 왜도를 보면 10% 유의수준에서 왼쪽으로 약간 치우쳐 있으나, 5% 유의수준에서 치우쳐 있지 않다. 그러나 첨도를 보면 1% 유의수준에서 정규분포보다 뽀족하며, Jarque-Berra 통계량 역시 정규분포하지 않는 것으로 나타나 전형적인 금융시계열의 특성을 가지고 있다.

또한 오차항의 이분산성을 ARCH 통계량으로 검정한 결과 시차 1-10까지 모두 이분산성을 가지고 있는 것으로 나타났다. 수익률 자료의 제곱을 한 자료의 오차항의 자기상관을 q 통계량으로 조사한 결과 시차 50까지 모두 자기상관이 나타나지 않는 귀무가설을 1% 유의수준에서 기각하므로, SPC500 주가지수 수익률은 모든 시차에서 자기상관이 나타나지 않은 것은 아니다.

그리고 Lo와 MacKinlay의 5기의 분산비율검정(variance ratio(5)) 검정에서는 분산비가 약 0.84로 나타났고 p값이 0.046으로 나타나 5% 유의수준에서는 5기까지 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하므로 계열의 종속성이 나타나고 있다. 그러나 1% 유의수준에서는 5기까지 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하지 못하고 있으므로 SPC500 주가지수는 1% 유의수준에서는 미래기의 수익률은 과거기나 현재기의 수익률로 예측할 수 없다.

그러나 SPC500 주가지수의 장기기억과정(long memory process)을 검정하는 Hurst-Mandelbrot의 R/S(Rescaled Ranged) 검정통계량과 Lo의 R/S 검정통계량으로 볼 때 5% 유의수준에서 장기적으로 자기상관과 장기 종속성은 발생하지 않는 것으로 나타났다.

Runs 검정통계량은 역시 0.53로 나타나 5%와 1% 유의수준에서 변동성 방향이 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하지 못하고 변동성 방향이 종속성을 가지고 있음을 나타낸다. 이것은 SPC500 주가지수 수익률이 현재기 양으로 나타나면 그 다음 기에도 양으로 나타나며, SPC500 주가지수 수익률이 현재기 음으로 나타나면 그 다음 기에도 음으로 나타나는 경향이 있다는 것을 의미하는데 이것 역시 금융시계열의 특징 중의 하나인 유령효과(ghost effect)를 나타내고 있다.

따라서 SPC500 주가지수 수익률은 정규분포하지 않으며 이분산성을 가지고 있으며 단기에서 수익률의 변동성의 방향은 종속성이 있으나, 수익률은 대체로 변동성에 있어 장기적은 종속성이 없는

것으로 나타났다.

<표 2> 실현된 수익률(RR)과 실현된 변동성(RV)

A. 실현된 수익률(RR)			
a. Normality Test			
	Statistic	t-Test	P-Value
Skewness	-0.078567	1.6682	0.095274
Excess Kurtosis	6.0348	64.092	0.00000
Jarque-Bera	4102.9	.	0.00000
b. ARCH Test			
ARCH 1-2 test:	F(2,2697) =	366.98	[0.0000]**
ARCH 1-5 test:	F(5,2691) =	189.96	[0.0000]**
ARCH 1-10 test:	F(10,2681)=	102.98	[0.0000]**
c. Q-Statistics			
Q-Statistics on Squared data			
Q(5) =	1542.36	[0.0000000]**	
Q(10) =	2513.72	[0.0000000]**	
Q(20) =	3807.48	[0.0000000]**	
Q(50) =	6074.94	[0.0000000]**	
d. Lo and MacKinlay Variance-Ratio Test			
N	VR stat	ZN stat	P-value
5.00000	0.83862	-1.99591	0.04594
e. Long Memory Test			
Hurst-Mandelbrot R/S test statistics: 0.923014			
Lo R/S test statistics (q=1): 0.949639			
Critical Values: 90%: [0.861, 1.747], 95%: [0.809, 1.862], 99%: [0.721, 2.098]			
f. RUNS TEST = 0.534695 [0.5928608]			
B. 실현된 변동성(RV)			
a. Normality Test			
	Statistic	t-Test	P-Value
Skewness	9.8762	209.70	0.00000
Excess Kurtosis	156.07	1657.5	0.00000
Jarque-Bera	2.7861e+006	.NaN	0.00000
b. ARCH Test			
ARCH 1-2 test:	F(2,2697) =	176.46	[0.0000]**
ARCH 1-5 test:	F(5,2691) =	118.65	[0.0000]**
ARCH 1-10 test:	F(10,2681)=	92.209	[0.0000]**
c. Q-Statistics			
Q-Statistics on Squared data			
Q(5) =	856.411	[0.0000000]**	
Q(10) =	1379.93	[0.0000000]**	
Q(20) =	1880.20	[0.0000000]**	
Q(50) =	2392.10	[0.0000000]**	
d. Lo and MacKinlay Variance-Ratio Test			
N	VR stat	ZN stat	P-value
5.00000	3.59690	10.45193	0.00000
e. Long Memory Test			
Hurst-Mandelbrot R/S test statistics: 7.20365			
Lo R/S test statistics (q=1): 5.55829			
Critical Values: 90%: [0.861, 1.747], 95%: [0.809, 1.862], 99%: [0.721, 2.098]			
f. RUNS TEST =-33.9652 [0.0000000]**			

주) Lo and Mackinlay Variance-Ratio 검정에선 N은 시차의 개수를 나타내며, VR은 Variance-Ratio 통계량을 나타내고, ZN stat는 $[VR(N) - 1] / \sqrt{Var(VR)}$ 통계량을 나타낸다. ZN 통계량의 점근분포는 N(0,1)이다. Hurst-Mandelbrot Test에서 귀무가설은 자기상관이 존재하지 않는다는 것이고, Lo Test에서 귀무가설은 장기 의존성(long-term dependence)이 존재하지 않는다는 것이다. **는 1 % 유의수준에서 귀무가설이 기각됨을 나타낸다.

2) 실현된 변동

한편, <표2>의 아래 부분에서는 SPC500 주가지수의 실현된 변동(RV)에 대한 여러 가지 분석을 보여주고 있다. 먼저 정규분포 검정결과 왜도를 보면 9.88로 나타나 5%와 1% 유의수준에서 오른쪽으로 훨씬 치우쳐 있으며 첨도 역시 통계량이 156.07로 나타나 정규분포보다 훨씬 뽕뽕하게 나타났고, Jarque-Berra 통계량 역시 매우 높게 나타나 정규분포하지 않는 것으로 나타났다. 오차항의 이분산성에 대한 것은 ARCH 통계량으로 검정한 결과 시차 1-10까지 모두 이분산을 가지고 있는 것으로 나타나 미국 SPC500 주가지수의 변동은 전형적인 금융시계열의 특성을 가지고 있다.

자승한 실현된 변동(RV)의 오차항의 자기상관을 q 통계량으로 조사한 결과 1-50까지의 모든 시차에서 자기상관계수가 0이라는 귀무가설을 1%와 5% 유의수준 모두에서 기각하고 있으므로 미국 SPC500 주가지수의 변동성은 계열적 종속성이 존재한다고 볼 수 있다. 이것은 SPC500 주가지수의 변동이 큰 구간에서는 변동성이 크고 변동이 작은 구간에서는 변동이 작은 전형적인 금융시계열상 자주 나타나는 변동성 클러스터의 특징을 잘 나타내고 있다.

이러한 특징은 다음의 Lo와 MacKinlay의 분산비율 검정통계량이 3.59로 나타나 5% 혹은 1% 유의수준에서 미국 SPC500 주가지수는 랜덤워크가 아니라는 것을 보여주고 있다. 또한 Hurst-Mandelbrot의 R/S 검정통계량이 7.20, Lo의 R/S 검정통계량이 5.56으로 나타나 5% 혹은 1% 유의수준에서 자기상관과 장기 종속성이 없다는 귀무가설을 모두 기각하고 있어 다시 한 번 SPC500 주가지수의 실현 변동성은 장기기억과정을 가지고 있고 자기상관을 가지고 종속성을 가지고 있는 것으로 나타나 변동성 집중현상과 변동성 클러스터를 또한 확인시켜주고 있다. Runs 검정 역시 통계량이 -33.97로 나타나 SPC500 주가지수의 변동성이 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하므로 변동성은 시계열 의존성을 가지고 있다.

3) Bipower 변동

<표3>에서 SPC500 주가지수의 실현된 Bipower 변동(BV)을 보면 정규분포 검정결과 왜도가 10.07로 나타나 위의 실현된 변동(RV)와 마찬가지로 5% 유의수준에서 오른쪽으로 치우쳐 있으며 첨도 162.93으로 나타나 역시 정규분포보다 뽕뽕하게 나타났으며, Jarque-Berra 통계량 역시 아주 높게 나타나 정규분포하지 않는 것으로 나타났다. 오차항의 이분산성 역시 ARCH 통계량으로 검정한 결과 시차 1-10까지 모두 이분산성을 가지고 있는 것으로 나타나 금융시계열의 특성을 보여주고 있다. 오차항의 자기상관을 q 통계량으로 조사한 결과 실현된 변동과 마찬가지로 1% 유의수준에서 시차 5-50 동안 실현된 Bipower 자승 변동이 모든 시차에서 변동성의 계열적 종속성이 없다는 귀무가설을 기각하고 있어 미국 SPC500 주가지수는 시계열상관을 가지고 있다. 따라서 미국 SPC500 주가지수의 변동성을 Bipower 변동성으로 측정하여도 변동성 클러스터의 특징을 잘 나타내준다.

그 외에도 미국 SPC500 주가지수의 실현된 Bipower 변동성 역시 Lo와 MacKinlay의 분산비율 검정통계량이나 Hurst-Mandelbrot의 R/S 검정통계량과 Lo의 R/S 검정통계량 등의 결과로 볼 때, 1% 유의수준에서 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하며 자기상관과 장기 종속성이 나타나고 있으며, Runs 검정 역시 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하여 변동성의 특징을 나타내고 있다.

<표 3> Bipower 변동성(BV)

a. Normality Test			
	Statistic	t-Test	P-Value
Skewness	10.065	213.70	0.00000
Excess Kurtosis	162.93	1730.4	0.00000
Jarque-Bera	3.0343e+006	.	0.00000
b. ARCH Test			
ARCH 1-2 test:	F(2,2697) =	163.59	[0.0000]**
ARCH 1-5 test:	F(5,2691) =	116.82	[0.0000]**
ARCH 1-10 test:	F(10,2681)=	90.688	[0.0000]**
c. Q-Statistics			
Q-Statistics on Squared data			
Q(5) =	812.395	[0.0000000]**	
Q(10) =	1281.26	[0.0000000]**	
Q(20) =	1704.53	[0.0000000]**	
Q(50) =	2208.99	[0.0000000]**	
d. Lo and MacKinlay Variance-Ratio Test			
N	VR stat	ZN stat	P-value
5.00000	3.55834	10.41728	0.00000
e. Long Memory Test			
Hurst-Mandelbrot R/S test statistics: 7.19855			
Lo R/S test statistics (q=1): 5.57842			
f. RUNS TEST=-33.6993 [0.0000000]**			

주) 모든 검정에서 **는 1 % 유의수준에서 귀무가설이 기각됨을 나타낸다.

라. 실현된 점프 변동성과 점프통계량

1) 점프 변동성

<표4>의 윗부분에서는 실현된 점프(RJ_BV)의 변동성을 나타내고 있다. 먼저 정규분포 검정결과 왜도를 보면 21.53으로 나타나 위의 실현된 수익률의 변동(RV_BV)와 마찬가지로 1% 유의수준에서 오른쪽으로 치우쳐 있으며, 첨도 역시 621.53으로 나타나 정규분포보다 훨씬 뾰족하며, Jarque-Berra 통계량 역시 정규분포하고 있지 않음을 보여주고 있다.

그러나 위의 실현된 수익률과 실현된 변동과 실현된 Bipower 변동과 같이 SPC500 주가지수의 실현된 점프(RJ_BV) 역시 ARCH 통계량으로 검정한 결과, ARCH 효과가 5% 유의수준에서 나타나 시차 1-10까지 모두 이분산성을 가지고 있다. 그리하여 SPC500 주가지수의 변동성의 점프의 크기가 변하고 있음을 나타낸다. 오차항의 자기상관을 q 통계량으로 조사한 결과 5-50기에서 자기상관 혹은 시계열 상관을 가지고 있는 것으로 나타났다.

한편, Lo와 MacKinlay의 분산비율 검정통계량을 보면 SPC500 주가지수의 점프가 단기(N=5)에서 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하지 못하고 있지만, N=10이상의 장기에서는 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하고 있다. 그리고 Hurst-Mandelbrot의 R/S 검정통계량에서도 자기상관과 시계열상관이 5%와 1% 유의수준에서 없다는 것을 기각하여 점프의 시계열 의존성을 나타내고 있다. Lo의 R/S 검정통계량에서는 5%와 1% 유의수준 모두 실현된 SPC500 주가지수의 점프(RV_BV)가 단기의존성은 있는 것처럼 나타났지만(q=1), 장기의존성(q=10,20,50,100)과 장기기억과정을 가지고 있지 않는 것으로 나타났고, Runs 검정에서도 변동성은 자기상관성이 없는 것으로 나타났다.

<표 4> 실현된 변동성 점프(RJ_BV)와 점프 통계량(RJ_Stat)

A. 변동성 점프 (RJ_BV)			
a. Normality Test			
	Statistic	t-Test	P-Value
Skewness	21.529	457.12	0.00000
Excess Kurtosis	621.53	6600.9	0.00000
Jarque-Bera	4.3700e+007	.	0.00000
b. ARCH Test			
ARCH 1-2 test:	F(2,2697) =	159.31	[0.0000]**
ARCH 1-5 test:	F(5,2691) =	78.980	[0.0000]**
ARCH 1-10 test:	F(10,2681)=	42.515	[0.0000]**
c. Q-Statistics			
Q-Statistics on Squared data			
Q(5) =	325.375	[0.0000000]**	
Q(10) =	325.392	[0.0000000]**	
Q(20) =	325.444	[0.0000000]**	
Q(50) =	377.549	[0.0000000]**	
d. Lo and MacKinlay Variance-Ratio Test			
	N	VR stat	ZN stat P-value
	5.00000	1.45470	1.33840 0.18077
	10.00000	1.83354	1.70273 0.08862
	30.00000	2.16232	1.90434 0.05687
	50.00000	2.47201	2.23062 0.02571
	100.00000	3.31680	3.14158 0.00168
e. Long Memory Test			
Hurst-Mandelbrot R/S test statistics: 2.28422			
Lo R/S test statistics (q=1): 2.27526			
Lo R/S test statistics (q=10): 1.67441			
Lo R/S test statistics (q=20): 1.59585			
Lo R/S test statistics (q=50): 1.47666			
Lo R/S test statistics (q=100): 1.29729			
Critical Values: 90%: [0.861, 1.747], 95%: [0.809, 1.862], 99%: [0.721, 2.098]			
f. RUNS TEST = 0.194552 [0.8457435]			
B. 점프통계량(RJ_Stat)			
a. Normality Test			
	Statistic	t-Test	P-Value
Skewness	1.5444	32.792	7.5544e-236
Excess Kurtosis	5.2140	55.375	0.00000
Jarque-Bera	4134.8	.NaN	0.00000
b. ARCH Test			
ARCH 1-2 test:	F(2,2697) =	1.7899	[0.1672]
ARCH 1-5 test:	F(5,2691) =	1.4990	[0.1868]
ARCH 1-10 test:	F(10,2681)=	1.6966	[0.0757]
ARCH 1-20 test:	F(20,2661)=	1.2145	[0.2312]
ARCH 1-50 test:	F(50,2601)=	1.1861	[0.1755]
ARCH 1-100 test:	F(100,2501)=	0.99111	[0.5069]
c. Q-Statistics			
Q-Statistics on Squared data			
Q(5) =	8.01367	[0.1554841]	
Q(10) =	19.5007	[0.0343449]*	
Q(20) =	28.0365	[0.1085391]	
Q(50) =	67.4498	[0.0504669]	
d. Lo and MacKinlay Variance-Ratio Test			
	N	VR stat	ZN stat P-value
	5.00000	1.12921	2.88738 0.00388
e. Long Memory Test			
Hurst-Mandelbrot R/S test statistics: 2.82062			
Lo R/S test statistics (q=1): 2.76629			
Critical Values: 90%: [0.861, 1.747], 95%: [0.809, 1.862], 99%: [0.721, 2.098]			
f. RUNS TEST = -0.881268 [0.3781729]			

주) 모든 검정에서 (***)는 5%(1%) 유의수준에서 귀무가설이 기각됨을 나타낸다.

따라서 SPC500 주가지수의 실현된 점프(RJ_BV)의 크기가 중단기적으로 시계열 상관을 가지고 있

으며 점프의 크기가 이분산을 가지고 상당히 다르게 나타나 있지만, 장기적으로는 SPC500 주가지수의 변동성 점프는 장기의존성이 없으며 5% 유의수준에서 의존성이 있으므로, 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하지 못하고 점프변동이 불연속적이고 랜덤하게 발생하고 있다.

2) 점프 통계량

<표4>의 아래 부분에서는 Tripower을 사용하여 구한 실현된 점프통계량(RJ_Stat)을 나타내고 있다. Tripower을 사용하여 구한 실현된 점프통계량(RJ_Stat) 역시 실현된 점프(RJ_BV)의 결과와 예상했던 대로 거의 비슷하게 나타났다.

즉 정규분포 검정결과 왜도를 보면 1.54로 나타나 5% 유의수준에서 오른쪽으로 치우쳐 있으며 첨도 역시 5.21로 나타나 정규분포보다 뽕뽕하며, 그리고 Jarque-Berra 통계량 역시 매우 높게 나타나 정규분포하고 있지 않는 것으로 나타났다. ARCH 통계량으로 검정한 결과 시차 1-100까지 모두 이분성을 가지고 있다. SPC500 주가지수의 변동성 점프를 q 통계량으로 시계열 상관을 조사한 결과도 5-50기 중에서 10기에서만 5% 유의수준에서 점프통계량의 변동은 오차항에서 시계열상관이 있는 것으로 나타났으나 그 외 경우에는 모두 시계열 상관이 없는 것으로 나타났다.

그리고 Tripower을 사용한 SPC500 주가지수의 실현된 점프통계량(RJ_Stat)은 Lo와 MacKinlay의 분산비율 검정통계량이 5기에서는 1.13으로 나타나 5% 유의수준에서 랜덤워크라는 귀무가설을 기각할 수 없는 것으로 나타났다. Hurst-Mandelbrot의 R/S 검정통계량과 Lo의 R/S 검정통계량에서도 5%와 1% 유의수준에서 장기기억과정이 없으며 장기적 종속성 역시 나타나고 있지 않다. Runs 검정 역시 자기상관이 없는 것으로 나타나 SPC500 주가지수는 장기적으로 점프통계량이 5% 유의수준에서 랜덤워크라는 귀무가설을 기각하지 못하고 있으며 장기적인 종속성이 없는 것으로 나타났다.

마. 변동성과 변동성 점프의 그래프 분석

다음 <그림4>는 각각 실현된 SPC500 주가지수의 수익률(RR), 수익률의 실현된 변동(RV), 실현된 수익률의 Bipower 변동(BV), 실현된 점프(RJ-BV), 그리고 Tripower를 사용했을 때 실현된 점프 통계량(RJ_Stat)을 나타낸다.

<그림4>에 나타나 있듯이 2001년-2010년 동안의 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률(RR)은 그래프에서 평균 0을 중심으로 크게 변동하고 있으며 또한 수익률이 한 번 커지면 큰 상태로 어느 정도 지속되고 그 다음에는 상대적으로 변동성이 작은 기간이 뒤따르는 종속성을 보여주고 있으며, 또한 수익률 변동의 크기가 큰 것과 작은 것이 각각 군집을 이루는 변동성집중(volatility clustering) 현상을 보이고 있다. 특히 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률(RR) 변동은 2002년과 2003년 전후로 다소 크게 나타났고 2007년 말 미국의 서브프라임 모기지로 인한 미국 금융시장의 불안과 이로 인한 2008년 중 나타난 세계 금융위기 여파로 인해 2008년부터 변동성이 큰 폭으로 증가하기 시작하여 2009년 전후로도 아주 크게 나타났다가 세계 각국의 대응조치로 인해 2009년 후반부터 변동성이 다소 감소하고 있다.

실현된 수익률의 분산을 나타내는 실현된 수익률의 변동(RV)과 실현된 수익률의 Bipower 변동성

(BV)은 역시 모두 변동성 변동성집중(volatility clustering) 현상을 또한 보이고 있는데, SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률 변동(RV)과 실현된 수익률의 Bipower 변동(BV) 모두 역시 2009년 전후로 아주 크게 나타났다. 수익률의 변동성은 2009년 직전에 아주 크게 나타났다가 2009년을 지나면서 변동성의 폭이 감소하였던 것으로 나타났다.

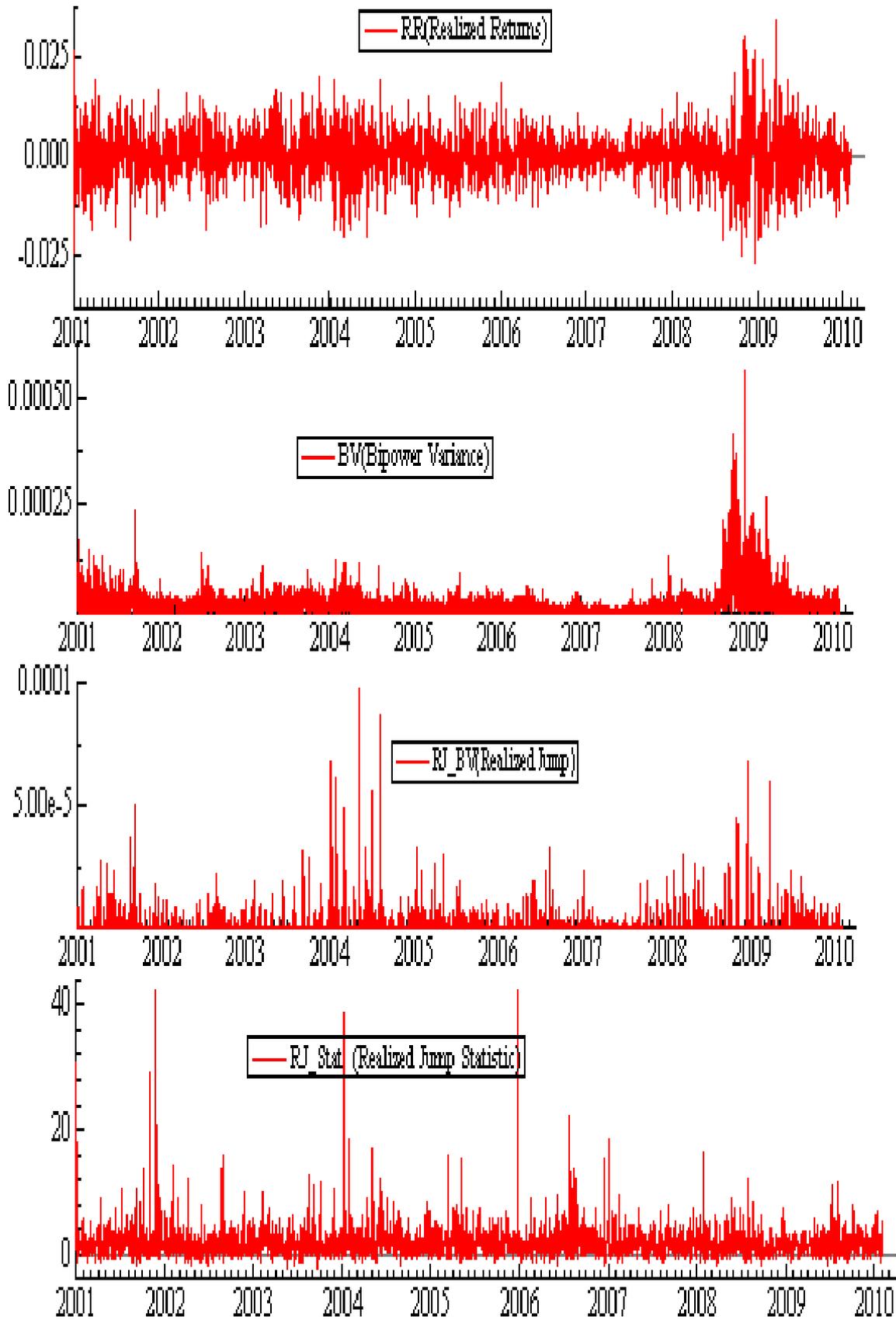
SPC500 주가지수의 실현된 수익률 변동성(RV)과 실현된 수익률의 Bipower 변동성(BV)은 2000년대 초에 년도 마다 한두 차례 비교적 큰 변동성이 있었지만, 2003년부터 2007년까지는 비교적 변동성이 상당히 작았다가 2008년부터 변동성이 크게 나타나기 시작하여 2009년 전후로 최고조에 달하였다. 그리고 그 후 변동성이 작아졌다가 2010년 다시 변동성이 크게 나타나 실현된 수익률의 변동성은 2000년대 초반 어느 정도의 점프가 있었으며, 특히 2009년 전후에 매우 큰 크기의 불규칙적인 점프가 나타났다.

그리하여 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성 점프(RJ_BV)의 그래프를 보면 2001년과 2004년 사이에 약간의 유의적인 점프가 빈번하게 나타났으며, 세계의 금융위기가 발생하였던 2009년 전후에는 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성 점프가 매우 크게 그리고 자주 발생한 것을 알 수 있다. 따라서 불규칙한 점프가 발생할 때는 SPC500 주가지수의 수익률의 실현된 변동성은 실현된 수익률의 Bipower 변동성(BV)으로서만 나타낼 수 없으며, 수익률의 실현 변동성은 연속적인 실현된 수익률 Bipower 변동성(BV)과 불연속적인 점프부분을 포함해야 된다.

RJ_Stat는 Quaripower를 사용했을 때의 변동성의 점프통계량을 나타내는데 2004년, 2006년, 그리고 2008년에 점프 통계량이 종종 상당히 크게 나타나고 있으며 2010년 전후에도 매우 큰 점프 통계량을 보이고 있다. SPC500 주가지수의 수익률에서 변동성 점프통계량의 그래프가 변동성 점프의 그래프와 상당히 다르게 나타나는 것은 점프통계량은 점프의 크기를 점프의 Quartipower 수익률의 표준편차로 표준화한 것으로 2000년부터 2007년 상반기까지 실현된 점프는 2009년에 비해 상대적으로 크지 않았지만, 2000년대 초반은 물론이고 2004년, 2006년, 2007년, 그리고 2008년 동안에 2009년보다는 작지만 상당히 큰 점프통계량을 보이고 있다. 2000년대 초반부터 2007년까지 실제 변동성 점프의 크기는 작았지만 만 quartipower 수익률 역시 아주 작았기 때문에 이들 시기에 실현된 점프 통계량은 상당히 크게 나타나고 있으며 2000년과 2010년 사이에 맨 마지막 그림에 나와 있듯이 거의 모든 기간에 유의한 점프통계량을 보여주고 있다.

SPC500 주가지수의 점프통계량과 실현된 점프의 관계는 실현된 점프통계량이 0보다 크게 유의하게 나타날 때는 수익률의 변동성 점프가 0보다 크게 나타나지만 유의하지 않을 때에는 변동성 점프는 0으로 나타나는데, 변동성 점프(RJ_BV)의 그래프에서는 변동성 점프가 0과 다른 유의한 점프가 많이 발생하였으며, 이것은 맨 마지막의 변동성이 상당히 큰 실현된 변동성의 점프통계량으로 나타나고 있다.

그리하여 2000년과 2010년 기간 중에 SPC500 주가지수의 실현된 수익률의 변동성 점프(RJ_BV)와 점프통계량(RJ_Stat)의 그래프에서 나타난 것과 같이 점프통계량 기준에 의하면 SPC500 주가지수의 실현된 수익률의 변동에 있어 불연속적이고 유의한 점프가 많이 발생하였다는 것을 알 수 있다.



<그림 4> 변동성과 점프 및 점프통계량 분포

바. 변동성 점프 발생 확률

SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성 점프(RV-BV)의 발생확률을 먼저 <표5a>, <표5b> 그리고 <표5c>에서와 같이 Tri-power quarticity 경우와 <표6a>, <표6b> 그리고 <표6c>의 Quad-power quarticity 경우로 나누어 구하였다. 그리고 두 경우에 있어 일종의 점프가 발생할 확률은 (14)에 나타난 α 값에 따라 구하였는데, 본 연구에서는 $\alpha=0.90, 0.95, 0.995, 0.999$ 그리고 0.9999 등의 여러 값에 따라 나누어 각각 점프가 발생할 확률을 구하였다.

1) Tri-power quarticity 점프 통계량

첫째, (11)식으로부터 Tri-power quarticity를 사용하여 구한 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성의 점프 발생확률을 총 2,702일 중에서 구해서 분석해본다. 먼저 <표5a>에서 살펴보면 $\alpha=0.90$ 일 때 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 점프 횟수는 957 번 나타났고 점프 발생확률은 35.42%로 나타났다. $\alpha=0.95$ 일 때는 점프의 횟수는 739번 나타났고 점프 발생확률은 27.35%로 나타나 2000년대 미국의 SPC500 주가지수는 점프가 상당히 높게 나타났다. 그리하여 $\alpha=0.95$ 일 때는 미국의 SPC500 주가지수는 2000-2010년 사이에 평균 3.66일 만에 한 번씩 점프가 발생하여 일주일에 약 두 번 가까이 SPC500 주가지수의 수익률의 변동성에 점프가 발생하였다.

$\alpha=0.995$ 일 때는 총 2,702일 중에서 433번 점프가 발생하여 16.03%의 비교적 높은 점프확률을 기록하고 있다. 그리고 점프 발생확률을 측정할 때 가장 일반적인 수준인 $\alpha=0.9995$ 의 경우에는 총 2,702 일 중에서 점프가 245 번 일어나서 점프가 발생할 확률이 9.07%를 기록하고 있다. 따라서 2000년대 들어 미국의 SPC500 주가지수는 비교적 점프가 많이 일어났다는 것을 알 수 있다. 거의 11.03일 즉 11일에 한 번씩 미국의 SPC500 주가지수는 매우 큰 점프가 발생한 것으로 나타났다. 이제 좀 더 α 값이 큰 $\alpha=0.9999$ 의 경우에는 점프가 146번 일어나서 점프가 발생할 확률이 5.40% 발생하여 18.52일 만에 한 번씩 미국의 SPC500 주가지수는 점프가 발생한 것으로 나타났다.

둘째, Tri-power quarticity를 사용한 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 로그 변동성을 사용한 (12)식의 로그 점프 통계량을 이용하여 구한 점프 발생확률을 <표5b>에서 살펴보면 $\alpha=0.90$ 이면, 총 2,702 일 중에서 910 번 점프가 발생하여 점프가 발생할 확률이 33.68%가 나타났고, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수도 671번 발생하여 점프가 발생할 확률이 24.83%로 나타나 평균 4.03일 즉 약 4일 만에 한 번씩 2000년대 들어 미국의 SPC500 주가지수 수익률은 점프가 발생하였다.

또한 $\alpha=0.995$ 일 때는 총 2,702일 중에서 343 번 점프가 발생하여 12.69%의 점프확률을 기록하여 약 7.88일 만에 점프가 한 번씩 생하였다. $\alpha=0.999$ 의 경우에는 총 2,702 일 중에서 점프가 164번 일어나서 점프 발생확률이 약 2주일에 한 번씩 매우 큰 점프가 발생하였다. $\alpha=0.9999$ 의 경우에는 점프가 82번 발생하여 점프 발생확률이 3.03%로 나타났다.

5) α 의 수준에 따라 점프 발생확률이 달라지지만, 일반적으로 $\alpha=0.999$ 를 채택하고 있다.

<표 5a> Tripower quarticity를 사용했을 때 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under Ho=no jump)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	957	739	433	245	146
점프 확률 (probability of jumps)	0.3542	0.2735	0.1603	0.0907	0.0540

<표 5b> Tripower quarticity를 사용했을 때 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under Ho=no jump)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	910	671	343	164	82
점프 확률 (probability of jumps)	0.3368	0.2483	0.1269	0.0607	0.0303

<표 5c> Tripower quarticity를 사용했을 때 최대 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under Ho=no jump)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	883	627	310	137	67
점프 확률 (probability of jumps)	0.3268	0.2321	0.1147	0.0507	0.0248

셋째, <표5c>에서 Tri-power quarticity를 사용한 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 최대 로 조정된 로그 변동성을 사용한 (13)식으로부터 구한 로그 점프통계량을 사용하여 구한 점프 발생 확률은 $\alpha=0.90$ 이면, 총 2,702 일 중에서 883 번 점프가 발생하여 점프가 발생할 확률이 32.68%로 나타나 평균 약 3일 만에 한 번씩 점프가 발생하였다. $\alpha=0.95$ 이면, 총 2,702 일 중에서 627 번 점프가 발생하여 점프가 발생할 확률이 23.21%로 나타나 4.31일 만에 한 번씩 점프가 발생하였다.

$\alpha=0.995$ 일 때는 총 2,702일 중에서 310번 점프가 발생하여 11.47%의 점프확률을 기록하여 평균 8.72일 만에 점프가 한 번씩 발생하였다. 점프의 일반적인 측정수준인 $\alpha=0.999$ 의 경우에는 점프가 137번 일어나서 5.07%의 점프가 발생할 확률을 기록하여 19.72만에 매우 큰 점프가 한 번씩 발생하였다. 마지막으로 $\alpha=0.9999$ 로 아주 높은 수준에서는 총 2,702 일 중에서 매우 큰 점프가 67번 발생하여 2.48%의 점프가 발생할 확률을 기록하였다. 따라서 위의 점프통계량의 경우에 있어서 미국의 SPC500 주가지수의 경우 $\alpha=0.995$ 일 경우 11-16%의 점프 발생확률을 기록하였고 $\alpha=0.999$ 일 경우는 5-9% 정도의 매우 큰 점프가 발생하였고 일주일 혹은 이주일 남짓 만에 한 번씩 큰 점프가 있는 것

으로 나타났다.

2) Quad-power quarticity 사용한 점프 통계량

이제 점프통계량에 있어 Tri-power quarticity 대신 Quad-power quarticity를 사용한 경우를 살펴 보면 다음과 같다. 첫째, Quad-power quarticity를 사용하여 (11)식에서 구한 점프통계량을 이용하여 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성의 점프 발생확률을 <표 6a>에서 보면, $\alpha=0.90$ 일 때, 총 2,702일 중에서 991번 점프가 발생하여 36.68%의 점프확률을 나타내었다. $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수가 756번 나타나 점프가 발생할 확률이 27.98%로 나타났다.

<표 6a> Quad-power quarticity를 사용했을 때 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under Ho=no jump)	270.2	135.1	13.51	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	991	756	385	262	163
점프 확률 (probability of jumps)	0.3668	0.2798	0.1425	0.0970	0.0603

<표 6b> Quad-power quarticity를 사용했을 때 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under Ho=no jump)	270.2	135.1	13.51	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	946	704	307	187	104
점프 확률 (probability of jumps)	0.3501	0.2605	0.1136	0.0692	0.0385

<표 6c> Quad-power quarticity를 사용했을 때 최대 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under Ho=no jump)	270.2	135.1	13.51	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	906	643	256	142	74
점프 확률 (probability of jumps)	0.3353	0.2380	0.0947	0.0526	0.0274

미국의 SPC500 주가지수는 $\alpha=0.995$ 일 때는 총 2,702일 중에서 385번 점프가 발생하여 14.25 %의 점프확률을 나타내고 있다. 점프 발생확률인 일반적인 수준이 $\alpha=0.999$ 의 경우에는 총 2,702 일 중에서 점프가 262번 일어나서 점프가 발생할 확률이 9.70% 발생하여 9-10일만에 한 번씩 점프가 발생한

것으로 나타났다.

둘째, Quad-power quarticity를 사용한 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 로그 변동성을 사용하여 구한 (12)식을 이용하여 구한 점프 통계량에서 점프 발생확률을 구한 <표 6b>에서 살펴본다. 먼저 $\alpha=0.90$ 일 때 총 2,702 일 중에서 946번 점프가 발생하여 점프가 발생할 확률이 35.01%가 나타났고, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수도 704번 발생하여 점프가 발생할 확률도 26.05%로 나타났다.

그리고 $\alpha=0.995$ 일 때는 총 2,702일 중에서 307번 점프가 발생하여 11.36%의 점프확률을 기록하여 약 8-9일 만에 한 번씩 점프가 발생하였다. $\alpha=0.999$ 의 경우에는 총 2,702 일 중에서 점프가 187번 일어나서 점프 발생할 확률이 6.92%를 기록하였고, $\alpha=0.9999$ 의 경우에는 점프가 104번 발생하여 점프 발생할 확률이 3.85%로 나타났다.

마지막으로 Quad-power quarticity를 사용했을 때, (13)식과 같이 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 최대로 조정된 로그 변동성을 사용한 로그 점프통계량을 이용하여 구한 점프 발생확률을 <표 6c>에서 살펴보면, $\alpha=0.90$ 인 경우 총 2,702 일 중에서 906번 점프가 발생하여 점프가 발생할 확률이 33.53%로 나타났다. $\alpha=0.95$ 인 경우 총 2,702 일 중에서 643번 점프가 발생하여 점프가 발생할 확률이 23.80%로 나타났다

$\alpha=0.995$ 일 때는 총 2,702일 중에서 256번 점프가 발생하여 9.47%의 점프확률을 기록하여 약 10.6 일만에 한번 씩 점프가 발생한 것으로 나타났다. $\alpha=0.999$ 의 경우에는 총 2,702 일 중에서 점프가 역시 142번 발생하여 5.26%의 점프확률을 기록하여 약 19일 만에 한 번씩 점프가 발생하였다. $\alpha=0.9999$ 의 경우에는 점프가 74번 일어나서 2.746%의 점프 발생 확률을 기록한 것으로 나타났다.

그리하여 2000년 1월 3일 부터 2010년 9월 30일 동안의 미국 SPC500 주가지수는 Tri-power 혹은 Quad-power quarticity 사용하든지 상관없이 3가지 종류의 점프 통계량을 이용하여 구한 점프 발생확률은 로그(log) 점프나 최대 로그(max log) 점프를 사용하였을 때 점프확률은 아주 약간 떨어졌지만, 대체로 점프의 일반적인 측정수준인 $\alpha=0.955$ 인 경우에는 약 7일 혹은 10일 만에 한 번씩 점프가 발생하였으며, $\alpha=0.999$ 인 경우에는 약 10일 혹은 길게는 19일 만에 한 번씩 점프가 발생한 것으로 나타났다. 그리하여 2000년 이래 2010년까지 약 11년 동안 미국 SPC500 주가지수는 변동이 심하며 있었는데, 특히 불규칙적이고 불연속적인 점프가 종종 나타났던 것을 알 수 있다.

3) Min RV를 사용한 점프통계량

한편, 점프통계량에 있어 실현된 변동(RV) 대신에 최소 실현된 변동(Min RV)을 사용하여 구한 점프 발생빈도와 점프 확률을 보면 다음과 같다. 첫째, 최소 실현된 변동(Min RV)을 사용하여 (17)식에서 구한 점프통계량을 이용하여 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성의 점프 발생확률을 <표 7a>에서 보면, $\alpha=0.90$ 일 때, 총 2,702일 중에서 971번 점프가 발생하여 35.94%, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수가 761번 나타나 28.16%의 점프 발생확률을 각각 나타냈다.

미국의 SPC500 주가지수는 $\alpha=0.995$ 일 때는 386번 점프가 발생하여 14.29 %의 점프 발생 확률이 나타났고, $\alpha=0.999$ 의 경우에는 점프가 292번 일어나서 점프가 발생할 확률이 10.81%로 나타나 발생하여 9-10일 만에 한 번씩 점프가 발생한 것으로 나타났다.

둘째, 최소 실현된 변동(Min RV)을 사용하여 (18)식에서 구한 로그 점프통계량을 이용하여 구한

점프 발생확률을 <표 7b>에서 살펴본다. 총 2,702일 중에서, $\alpha=0.90$ 일 때 876번 점프가 발생하여 32.42%, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수가 648번 나타나 23.98%의 점프 발생확률을 각각 나타냈다. 미국의 SPC500 주가지수는 $\alpha=0.995$ 일 때는 256번 점프가 발생하여 9.47%의 점프 발생 확률이 나타났고, $\alpha=0.999$ 의 경우에는 점프가 157번 일어나서 점프가 발생할 확률이 5.80%로 각각 나타났다.

<표 7a> Min RV를 사용했을 때 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under $H_0=no$ jump)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	971	761	386	292	179
점프 확률 (probability of jumps)	0.3594	0.2816	0.1429	0.1081	0.0662

<표 7b> Min RV를 사용했을 때 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under $H_0=no$ jump)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	876	648	256	157	74
점프 확률 (probability of jumps)	0.3242	0.2398	0.0947	0.058	0.0274

<표 7c> Min RV를 사용했을 때 최대 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under $H_0=no$ jump)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	849	613	237	132	61
점프 확률 (probability of jumps)	0.3142	0.2269	0.0877	0.0489	0.0258

셋째, SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성의 점프 발생확률을 최소 실현된 변동 (Min RV)을 사용하여 (19)식에서 구한 최대 로그 점프통계량을 이용하여 <표7c>에서 보면, 총 2,702 일 중에서, $\alpha=0.90$ 일 때 849번 점프가 발생하여 31.42%, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수가 613번 나타나 22.69%의 점프 발생확률을 각각 나타냈다. 미국의 SPC500 주가지수는 $\alpha=0.995$ 일 때는 237번 점프가 발생하여 98.77%의 점프 발생 확률이 나타났고, $\alpha=0.999$ 의 경우에는 점프가 132번 일어나서 4.89%의 점프 발생확률이 나타났다.

4) Med RV를 사용한 점프통계량

마지막으로 실현된 변동(RV) 대신에 최빈 실현된 변동(Med RV)을 사용하여 점프통계량을 추정하여 구한 점프 발생빈도와 점프 확률을 보면 다음과 같다. 첫째, 최빈 실현된 변동(Med RV)을 사용하여 (20)식에서 구한 점프통계량을 이용하여 SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성의 점프 발생확률을 <표8a>에서 보면, 총 2,702일 중에서 $\alpha=0.90$ 일 때 1,030번 점프가 발생하여 38.12%, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수가 830번 나타나 30.72%의 점프 발생확률을 각각 나타냈다. $\alpha=0.995$ 일 때는 미국의 SPC500 주가지수는 430번 점프가 발생하여 15.91%의 점프 발생 확률이 나타났고, $\alpha=0.999$ 의 경우에는 점프가 292번 일어나서 점프가 발생할 확률이 10.81%로 나타났다.

둘째, SPC500 주가지수에 대한 실현된 수익률의 변동성의 점프 발생확률을 구하기 위해 최빈 실현된 변동(Med RV)을 사용하여 (22)식에서 구한 로그 점프통계량을 이용하여 구한 점프 발생확률을 <표8b>에서 살펴본다. 총 2,702일 중에서, $\alpha=0.90$ 일 때 968번 점프가 발생하여 35.83%, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수가 724번 나타나 26.80%의 점프 발생확률을 각각 나타냈다. 미국의 SPC500 주가지수는 $\alpha=0.995$ 일 때는 300번 점프가 발생하여 11.10%의 점프 발생 확률이 나타났고, $\alpha=0.999$ 의 경우에는 점프가 186번 일어나서 점프가 발생할 확률이 6.89%로 나타나 2주에 한 번씩 점프가 발생하였다.

셋째, 최빈 실현된 변동(Med RV)을 사용하여 (23)식에서 구한 최대 로그 점프통계량을 이용하여 <표8c>에서 보면, 미국의 SPC500 주가지수는 총 2,702일 중에서, $\alpha=0.90$ 일 때 956번 점프가 발생하여 35.38%, $\alpha=0.95$ 이면 점프의 횟수가 702번 나타나 25.98%의 점프 발생확률을 각각 나타냈다. 미국의 SPC500 주가지수는 $\alpha=0.995$ 일 때는 286번 점프가 발생하여 10.58%의 점프 발생 확률이 나타났고, $\alpha=0.999$ 의 경우에는 점프가 177번 일어나서 6.55%의 점프 발생확률이 나타나 역시 2주에 한 번씩 점프가 발생한 것으로 나타났다.

<표 8a> Med RV를 사용했을 때 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under $H_0=no\ jump$)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	1030	830	430	292	183
점프 확률 (probability of jumps)	0.3812	0.3072	0.1591	0.1081	0.0677

<표 8b> Med RV를 사용했을 때 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under $H_0=no\ jump$)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	968	724	300	186	95
점프 확률 (probability of jumps)	0.3583	0.2680	0.1110	0.0689	0.0352

<표 8c> Med RV를 사용했을 때 최대 로그 점프 확률

유의수준(critical level)	0.900	0.950	0.995	0.999	0.9999
임계치(critical value)	1.28155	1.6449	2.5758	3.0902	3.7190
기대 점프 개수 (under Ho=no jump)	270.2	135.1	27.02	2.702	0.2702
발견된 점프 개수 (detected number of jumps)	956	702	286	177	92
점프 확률 (probability of jumps)	0.3538	0.2598	0.1058	0.0655	0.0340

그리하여 최빈 실현된 변동(Med RV)을 사용하여 점프통계량을 추정하여 구한 결과가 위의 다른 세 경우보다 점프발생빈도와 점프 발생확률이 조금씩 더 높게 나타났다.

4. 결론

금융자산가격의 실현변동성과 점프의 불연속성 등에 대한 연구는 세계적으로 볼 때 2000년대 들어 연구가 갖 시작되기 시작한 생소한 연구분야지만 중요한 이슈이다. 국내에서는 아직까지 주가지수 등의 연속적 파워변동성과 불연속적인 점프 변동에 대한 개념소개도 거의 안 된 실정이며, 특히 초고빈도 자료와 파워변동성 등을 이용한 주가지수의 실현변동성과 불연속적인 점프 통계량과 점프 발생 확률 등에 대한 비모수적 실증연구가 전혀 없다.

그리하여 본 연구는 2001년-2010년 2,702일동안 미국의 SPC500 주가지수의 하루 5분 간격의 초고빈도자료(총 208,054개 관측치)를 사용하여 미국 SPC500 주가지수 수익률을 새로운 이론과 분석기법인 비모수적 실현 변동성을 변동성 파워 이론을 사용하여 초고빈도 자료를 통한 연속적 변동성과 불연속적 점프변동성, 그리고 점프 통계량과 점프 발생확률에 대한 추정과 실증분석을 하였다.

그리하여 본 연구에서 분석하여 구한 중요한 결과와 공헌점을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 2001년-2010년 동안 SPC500 주가지수의 실현 수익률(RR)뿐만 아니라, 실현 변동성(RV), 실현된 수익률의 Bipower 변동성(BV) 모두 비정규분포와 변동성 집중현상과 점프 변동성을 보이고 있으며, 특히 2009년 전후에 변동성이 크게 나타났다. 특히 5분간 초고빈도 SPC500 주가지수를 이용하여 비모수적 변동성 분석결과 주로 저빈도를 이용하는 모수적 변동성 접근법이 규명하기 어려운 불규칙한 점프의 유무와 점프 변동성, 점프 통계량, 점프의 빈도와 확률 등을 엄밀하게 분석할 수 있었다.

둘째, SPC500 주가지수의 실현된 수익률의 변동성은 2002년, 2004년, 2006년, 2008년에 다소의 불규칙적이고 유의한 점프가 종종 있었고, 특히 세계금융위기가 있었던 2008년 이후 2009년 전후로 통계학적으로 아주 큰 점프가 상당히 크게 그리고 자주 발생하였던 것을 실증분석을 통해 확인할 수 있었다.

셋째, SPC500 주가지수 변동성의 점프통계량 검정결과, Tripower를 사용했을 때의 2004년, 2006년, 그리고 2008년경, 즉 2000년대 중반 2년 주기로 점프 통계량이 종종 상당히 크게 나타나고 있으며 2010년 전후에도 매우 큰 점프 통계량을 보이고 있으며 2000년 1월부터 2010년 9월말 까지 거의

전 기간에 걸쳐 유의한 불연속적인 점프가 지속적으로 발생하였다.

넷째, 일반적 유의수준인 $\alpha=0.999$ 인 경우에는 Tripower와 Quad-power를 사용하였을 때, 측정통계량에 따라 약간은 달랐지만 대체적으로 SPC500 주가지수는 2000-2010년 사이에 약 5-10%의 점프발생 확률이 나타나 적어도 10일 혹은 20일내에 유의한 점프가 한 번은 발생하였다.

다섯째, 2000년 1월부터 2010년 9월말 동안, 점프 추정량의 건전성을 위해 극히 최근에 개발된 최소 실현 변동치(Min RV)와 최빈 실현 변동치(Med RV)를 사용하여 추정한 점프변동성과 점프 통계량에 의해서도 불규칙적인 점프와 점프변동성이 자주 유의하게 나타났고, 최빈 실현 변동치(Med RV)를 사용하였을 때 점프발생확률이 다소 더 높게 나왔지만, $\alpha=0.999$ 인 경우에는 대체적으로 6-10%의 점프발생 확률이 나타나 10일 혹은 19일에 한 번씩 유의한 점프가 발생하였다.

따라서 본 연구는 최근 새롭게 개발된 비모수적 실현변동성 이론을 중심으로 최근 2000년-2010년 사이 세계적으로 가장 중요한 미국 SPC 500의 5분간의 주가지수의 변동성을 실증적으로 분석한 결과, 모수적 변동성 분석으로는 추정하기 힘든 불규칙적인 점프 변동성과 점프 발생확률 및 점프발생 회수를 추정함으로써 이론적인 뿐만 아니라, 실증적으로도 점프 발생확률에 대한 새로운 사실을 제시하고 있다.

■ 참고문헌

- Andersen, Torben G. and Tim Bollerslev, 1998a, Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review*, 39, 885-905.
- Andersen, Torben G. and Tim Bollerslev, 1998b, Deutschemark-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies, *Journal of Finance*, 53, 219-265.
- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, and F. X. Diebold, 2002, Parametric and Nonparametric Volatility Measurement." In Yacine Ait-Sahalia and Lars Peter Hansen(eds.), *Handbook of Financial Econometrics*. Amsterdam: North Holland.
- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, and Francis X. Diebold, 2004, Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Untangling Continuous and Jump Components in Measuring, Modeling and Forecasting Asset Return Volatility: Working Paper, Duke University.
- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, and Francis X. Diebold, 2007, Roughing it up: including Jump Components in the Measurement, Modelling and Forecasting of Return Volatility, *The Review of Economics and Statistics*, 89(4), 701-720.
- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, Francis X. Diebold, and Paul Labys, 2001, The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility, *Journal of the American Statistical Association* 96, 42-55.

- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, Francis X. Diebold, and Paul Labys, 2003a, Modeling and Forecasting Realized Volatility, *Econometrica* 71, 579–625
- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, Francis X. Diebold, and C. Vega, 2003b, Micro Effects of Macro Announcements: Real Time Price Discovery in Foreign Exchange, *American Economic Review*, 93, 38–62.
- Andersen, T. G., D. Dobrev, and E. Schaumburg, 2008, Jump-robust volatility Estimation using Nearest Neighbor Truncation, Working paper, Kellogg School of Management, Northwestern University.
- Bandorf-Nielsen Ole E., and Neil Shephard, 2001, Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B63*, 167–241.
- Bandorf-Nielsen Ole E., and Neil Shephard, 2004a, Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps, *Journal of Financial Econometrics* 2, 1–37.
- Bandorf-Nielsen Ole E., and Neil Shephard, 2004b, Measuring the Impact of Jumps on Multivariate Price Processed Using Bipower Variation, Discussion Paper, Nuffield College, Oxford University.
- Bandorf-Nielsen Ole E., and Neil Shephard, 2005a, How Accurate is the Asymptotic Approximation to the Distribution of Realized Volatility, Forthcoming in Donald W. K. Andrews, James L. Powell, Paul A. Ruud and James H. Stock (eds.), *Identification and Inference for Econometric Models. Essays in Honor of Thomas Rothenberg*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bandorf-Nielsen Ole E., and Neil Shephard, 2005b, Variation, Jumps, Market Frictions and High Frequency Data in Financial Econometrics, Discussion paper prepared for the 9th World Congress of the Econometric Society, Nuffield College, Oxford University.
- Bandorf-Nielsen Ole E., and Neil Shephard, 2006, Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation, Forthcoming in *Journal of Financial Econometrics* 4.
- Bollerslev, T. and Litvinova, J., and Tauchen, G., 2005, Volatility Asymmetry in High Frequency Data, Duke University.
- Chernov, Mikhail, A. Ronald Gallant, Eric Ghysels, and George Tauchen, 2003, Alternative Models for Stock Price Dynamics, *Journal of Econometrics* 116, 225–257.
- Eraker, B. Michael S. Johannes, and Nicholas G. Polsen, 2003, The Impact of Jumps in Volatility and Returns, *Journal of Finance* 58, 1269–1300.

- Eraker, B. 2004, Do Stock Prices and Volatility Jump? Reconciling Evidence from Spot and Option Prices, *Journal of Finance*, 59, 1367–1403.
- Johannes, M.S., 2004, The Statistical and Economic Role of Jumps in Continuous-Time Interest Rate Models, *Journal of Finance*, 59, 227–260.
- Shephard, Neil, 2005, *Stochastic Volatility: Selected Readings*. Oxford: Oxford University Press.
- Yi, Chae-Deug, 2011, Nonparametric Estimation of Continuous Power Variation Distribution, Discrete Jump and Micro-Market Disturbance in Foreign Exchange Rates, *Journal of Money and Finance*, Vol.25, No.1, 57–97.