

## Bayesian Inference for Stochastic Copula Models

TaeHyung Kim \*      Jeongmin Park †

**Abstract** We propose a new Bayesian MCMC algorithm for dynamic stochastic copula models with dependence parameters as unobserved state variables and present the performance of the proposed MCMC algorithm through simulations. Our MCMC algorithm draws the state variables with an acceptance-rejection Metropolis-Hastings algorithm using the candidate generating probability density function obtained by approximating the probability density function of the observed variables to the normal distribution of the dependence parameter. As an empirical example, we analyzed the stochastic copula models for the KOSPI index and the HSCE index (Hang Seng China enterprise index) returns from January 3, 2003 to December 30, 2014 using the proposed algorithm. The Bayesian inference and model comparison results of the stochastic copula models of Gaussian copula, Student t-copula, Clayton copula, Frank copula, rotated Gumbel copula, and Plackett copula showed that Student t-copula model could be selected as the best model. These model comparison results imply that even though Gaussian stochastic copula model can capture 'near asymptotic dependence', there may exist extreme tail dependence that can not be captured by the Gaussian stochastic copula model.

**Keywords** stochastic copula model, asymmetric dependence, tail dependence, Markov chain Monte Carlo algorithm, Bayesian model comparison

**JEL Classification** C22, C32, C58

---

\*Seoul National University

†Department of Business, Hanbat National University, E-mail: jmpark@hanbat.ac.kr

## 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론

김태형\*   박정민†

**Abstract** 본 연구는 연관성 파라미터를 미관측 상태변수로 가지는 확률코플러모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘을 제안하고, 시뮬레이션을 통해 본 연구에서 제안한 MCMC알고리즘의 성과를 제시한다. 본 연구의 MCMC알고리즘은 관측치의 확률밀도함수를 연관성 파라미터의 정규분포로 근사하여 얻어지는 후보생성확률밀도함수를 이용하는 ARMH알고리즘(acceptance-rejection Metropolis-Hastings algorithm)으로 상태변수를 사후표본추출 한다. 또한 본 연구에서 제안한 알고리즘을 이용하여 2003년 1월 3일 ~ 2014년 12월 30일 기간의 KOSPI지수와 HSCE지수(Hang Seng China enterprise index) 수익률 일간자료에 대한 확률코플러모형을 실증분석 하였다. 가우시언코플러, 코플러, Clayton코플러, Frank코플러, 회전Gumbel코플러, Plackett코플러의 확률코플러모형에 대한 베이지언 추정과 모형 비교 결과, 코플러모형이 가장 좋은 모형으로 선택되는 실증분석 결과를 얻었다. 이러한 모형 비교 결과는 가우시언확률코플러모형이 ‘near asymptotic dependence’를 포착할 수 있음에도 가우시언확률코플러모형이 포착할 수 없는 극단적인 꼬리 연관성이 남아 있을 수 있음을 의미한다.

**Keywords** 확률코플러모형, 비대칭적 연관성, 꼬리 연관성, MCMC알고리즘, 베이지언 모형 비교

**JEL Classification** C22, C32, C58

---

\*주저자 서울대학교

†교신저자 주소: 대전 유성구 동서대로 125 한밭대학교 S3동 512호, 전화: 042 821 1331, Fax: 042 821 1597 E-mail: jmpark@hanbat.ac.kr 논문투고일 2017년 8월 29일

## 1. 서론

자산가격 수익률의 시변조건분산(time-varying conditional variance)과 초과침도와 함께 자산가격 수익률들간의 연관성(dependence)은 포트폴리오 구성, 리스크 관리, 파생상품가격 결정 등에서 중요한 역할을 한다. 대부분의 이론 모형에서는 이러한 자산가격 수익률들의 연관성 측도로 다변량정규분포와 같은 타원분포(elliptical distributions)를 따르는 확률변수들의 선형 연관성 측도인 피어슨 상관계수(Pearson correlation coefficient)가 이용된다. 이러한 선형 연관성 측도를 이용한 자산수익률들 사이의 연관성을 설명하려는 특성은 기존 많은 다변량GARCH모형(multivariate generalized autoregressive heteroscedasticity models)과 다변량확률변동성모형(multivariate stochastic volatility models) 등의 실증분석 모형에도 반영되었다(Bauwens et al. (2006), Chib et al. (2009) 등).

선형 연관성 측도인 상관계수는 강증가선형변환(strictly increasing linear transform)에 대해서는 불변(invariant)이지만 강증가비선형변환(strictly increasing nonlinear transform)에 대해서는 불변이 아니므로 연관성 측도로 충분하지 못한 측면이 있다(Embrechts et al. (2002)). 특히, 선형 연관성 측도인 상관계수는 정상적인 시장 상황에서는 연관성이 크지 않은 자산들이 금융위기가 발생하는 경우 동반 폭락하는 특성을 보이지만 시장 호황기에 동반 상승하지는 않는 것과 같은 비선형, 비대칭, 꼬리 연관성(nonlinear, asymmetric, tail dependence) 등의 특징을 포착하기 어려운 단점이 있다. 이러한 상관계수의 한계 점을 극복하는 방안으로 도입된 것이 코플러함수를 이용하는 방법이다(Patton (2006)). 코플러함수는 개별 수익률들의 주변분포를 결합하여 수익률들의 다변량분포를 얻을 수 있는 함수이다. 특히, 적절한 코플러함수를 선택하여

자산가격들의 비대칭적인 연관성과 꼬리 연관성을 포착할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 또한, 수익률들의 다변량분포를 직접 모형화하지 않고 서로 다른 확률적 특성을 보이는 개별 수익률 분포를 코플러함수를 이용하여 결합하는 방법으로 수익률들의 다변량분포를 모형화 할 수 있다는 점은 다양한 자산들로 구성된 효율적인 포트폴리오 구성과 리스크 관리, 기초자산이 복수인 파생상품 가격결정 등에 매우 유용할 수 있다.

자산수익률들의 선형 연관성 측도인 상관계수가 시변하는 특성을 보일 뿐만 아니라 비대칭적이라는 특성은 기존의 실증분석을 통하여 잘 알려진 사실이다(Longin et al. (1995), Ang and Bekaert (2002), Ang and Chen (2002), Engle (2002), Tse and Tsui (2002), Pelletier (2006), Hong et al. (2007) 등). 이와 같은 시변 연관성을 포착하기 위하여 비선형·비대칭 및 꼬리 연관성을 포착할 수 있는 코플러함수의 연관성 파라미터 또한 시변하는 다양한 조건부동태코플러모형들(conditional dynamic copula models)이 도입되었다. 대표적인 시변 코플러모형으로는 Patton (2006)의 Copula-GARCH모형과 Creal et al. (2011, 2013)의 GAS모형(generalized autoregressive score models)이 있다. Patton (2006)의 Copula-GARCH모형에서는 연관성 파라미터의 동태방정식이 GARCH모형과 같이 전기의 연관성 파라미터와 수익률들의 확정함수(deterministic function)로 설정되므로 모형 추정이 비교적 쉽다는 장점이 있다. Creal et al. (2011, 2013)의 GAS모형에서는 파라미터의 동태방정식이 전기의 연관성 파라미터와 전기 우도함수의 스코어의 확정함수이다. Engle (2002)와 Tse and Tsui (2002)의 DCC모형(dynamic conditional correlation models) 또한 이와 유사한 조건부코플러모형으로 볼 수 있다. Heinen and Valdesogo (2009)는 Kendall의 순위상관계수(Kendall's rank correlation coefficient)와 연관성 파라미터의 함수관계를 이용하여 DCC모형을 조건부코플러모형의 연관성 파라미터의 동태방정식으

로 이용하였다.

Hafner and Manner (2012)는 확률변동성모형과 유사하게 연관성 파라미터가 미관측 상태변수(latent state variables)인 확률코플러모형을 제안하였다. 확률코플러모형에서는 연관성 파라미터가 미관측 상태변수이므로 모형 추정을 위해 상태변수를 적분 소거하여 우도함수를 구해야 한다. 이와 같은 특징은 확률변동성모형에서와 동일하지만, 확률코플러모형은 확률변동성모형보다 비선형성과 비정규성이 복잡한 비선형비정규상태공간모형(nonlinear non-gaussian state space models)이므로 모형 추정이 더 어렵다. 확률코플러모형의 경우, 비선형성과 비정규성이 강하기 때문에 확률변동성모형 추정에 이용된 Durbin and Koopman (1997), Jungbacker and Koopman (2009)의 선형상태공간모형으로의 근사와 칼만필터(Kalman filter)를 이용한 SML추정법(simulated maximum likelihood estimation method)을 이용하기 어렵다. Hafner and Manner (2012)는 Liesenfeld and Richard (2003), Richard and Zhang (2007)의 EIS(efficient importance sampling)을 이용한 SML추정법을 이용하여 확률코플러모형을 추정하였다. Almeida and Czado (2012)는 Liu and Sabatti (2000)의 MGMC알고리즘(multi-grid Monte Carlo algorithm)을 이용하여 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘을 제시하였다. 확률코플러모형의 비선형성과 비정규성이 강하므로 상태변수를 한꺼번에 사후표본추출 할 수 없다. 따라서 상태변수를 한 번에 하나씩 표본추출 하는 방법을 이용할 수밖에 없다. Almeida and Czado (2012)은 상태변수의 사전확률확률밀도함수를 후보생성확률밀도함수(proposal density or candidate generation density)로 이용하는 MH알고리즘(Metropolis-Hastings algorithm)으로 생성한 상태변수 사후표본을 Liu and Sabatti (2000)의 MGMC알고리즘으로 변환하는 방법으로 사후표본추출의 효율성을 높이고자 하였다. 그러나 1단계 MH알고리즘에서 관측치

의 정보를 이용하지 않고 상태변수의 전이확률밀도함수의 정보만을 이용하는 후보생성확률밀도함수를 이용하므로 사후표본추출의 효율성을 높이는 데는 한계가 있을 수밖에 없다. 상태변수인 연관성 파라미터의 지속성이 크지 않는 경우, Almeida and Czado (2012)의 MGMC를 이용한 사후표본추출이 비효율적일 수 있으므로 매우 많은 사후표본추출이 필요할 수 있다.

본 연구는 Hafner and Manner (2012)의 확률코플리모형에 대한 새로운 베이지언 추론 알고리즘을 제시하고자 한다. Almeida and Czado (2012)와 달리 본 연구의 MCMC알고리즘은 관측치의 확률밀도함수를 연관성 파라미터의 정규분포로 근사하여 얻어지는 후보생성확률밀도함수를 이용하는 ARMH알고리즘(acceptance-rejection Metropolis-Hastings algorithm)으로 상태변수를 사후표본추출한다. 관측치 확률밀도함수를 상태변수의 정규분포 근사하는데 1단계-Newton-Raphson알고리즘(one step Newton-Raphson algorithm)이 이용된다. 이는 실질적으로 2차 테일러근사를 이용하는 것으로 볼 수 있고, 사후표본추출과정이 반복됨에 따라 상태변수의 최빈값에서 관측치 확률밀도함수를 정규분포로 근사하는 라플라스 근사와 유사한 것으로 볼 수 있다. 이와 같은 관측치 확률밀도함수 근사에서 1단계-NR알고리즘을 적용하는 후보점 선택이 중요하다. 본 연구는 상태변수의 사전확률밀도함수의 평균을 1단계-NR알고리즘을 적용하는 후보점으로 이용한다.

본 연구는 연관성 파라미터를 미관측 상태변수로 가지는 확률코플리모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘(Markov Chain Monte Carlo algorithm)을 제안하고, 시뮬레이션을 통해 본 연구의 MCMC알고리즘의 성과를 제시한다. 본 연구의 베이지언 추론 알고리즘은 기존 연구에서 제시된 알고리즘보다 더 일반적인 확률코플리모형을 추정할 수 있는 알고리즘이다. 기존 확률변동성 모형에 대한 연구와 함께 본 연구에서 제안하는 베이지언 추론 알고리즘은 재

무·금융 분야의 실증분석과 응용에 기여할 수 있을 것으로 사료된다. 또한, 본 연구의 알고리즘을 이용한 실증분석으로 2003년 1월 3일 2014년 12월 30일 기간의 KOSPI지수와 HSCE지수(Hang Seng China enterprise index) 수익률 일간자료에 대한 확률변동성모형과 확률코플러모형을 분석하였다. 가우시언코플러(Gaussian copula), 코플러(Student-t copula), Clayton코플러(Clayton copula), Frank코플러(Frank copula), 회전Gumbel코플러(rotated Gumbel copula), Plackett코플러(Plackett copula)의 확률코플러모형에 대한 베이지언 추정과 모형비교 결과, 코플러모형이 가장 좋은 모형으로 선택되는 실증분석 결과를 얻을 수 있었다. 이러한 실증분석 결과는 연관성 파라미터가 시변하는 타원분포 확률코플러모형이 파라미터가 고정된 확률코플러모형이 포착하는 비대칭·비선형 꼬리 연관성을 설명할 수 있다는 Hafner and Manner (2012)의 주장에 부합한다. 그러나 이러한 모형비교 결과는 가우시언확률코플러모형이 ‘near asymptotic dependence’를 포착할 수 있음에도 불구하고 가우시언코플러모형이 포착할 수 없는 극단적인 꼬리 연관성이 남아 있을 수 있음을 의미한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저, 2장에서 코플러함수와 기존 연구에서 제시된 조건부코플러모형의 특성을 살펴본다. 3장에서는 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘과 확률코플러모형 진단과 비교에 이용되는 보조파티클필터(auxiliary particle filter), 그리고 베이지언 모형 비교 방법과 고전적 접근법의 모형 비교 방법을 논의한다. 4장에서는 모의실험을 통하여 본 연구의 확률코플러모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘의 성과를 제시한다. 그리고 5장에서 2003년 1월 3일 2014년 12월 30일 기간의 KOSPI지수와 HSCE지수 수익률 일간자료를 이용한 확률변동성모형과 확률코플러모형에 대한 실증분석과 확률코플러모형 비교 결과를 살펴본다. 마지막으로, 6장에 결론이 제시된다.

## 2. 코플러모형

### 2.1 코플러

주가 등과 같은 자산가격 수익률들은 상승할 때와 하락할 때 서로 상이한 의존성 또는 연관성(dependence)을 보여줄 뿐만 아니라 시장 위기상황에서 극단적인 동반 폭락과 같은 전형적인 특성을 보인다. 대칭적인 타원확률분포(elliptical distribution)의 상관계수(correlation coefficient)와 같은 선형 연관성 측도로는 이러한 자산가격들의 수익률분포가 보이는 비대칭적 연관성(asymmetric dependence)과 극단적인 꼬리 연관성(tail dependence)을 충분히 설명하기 어렵다. 코플러는 이러한 자산가격 수익률들이 보이는 비대칭적 연관성과 꼬리 연관성을 설명할 수 있는 다변량분포함수를 구성할 수 있도록 해준다.

코플러는 일변량주변확률분포함수(univariate marginal distribution function)를 결합하여 다변량결합확률분포함수(multivariate joint distribution function)를 결정하는 다변량함수임과 동시에 다변량확률분포함수이다. Sklar 정리(Sklar's theorem)에 따르면, 다음과 같은 관계를 충족하는 유일한 함수  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ 가 존재한다.

$$F(y_1, \dots, y_n) = C(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n)) \quad (2.1)$$

여기에서  $y_1, \dots, y_n$ 는 연속확률변수(continuous random variables),  $F(\cdot)$ 은 다변량확률분포함수, 그리고  $F_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$ 은 일변량주변확률분포함수이다. 코플러함수  $C(\cdot)$ 는 확률변수들 간의 연관성을 특징짓는 함수이다. 식 (2.1)



을 충족하는 코플러함수는 임의의 일변량주변확률분포함수를 결합하여 변수들이 서로 연관관계를 가지는 다변량분포를 구성할 수 있도록 해준다. 이 때 일변량주변확률분포들은 동일한 분포를 따르지 않을 수 있다. 모든 코플러분포함수가 코플러확률밀도함수를 가지는 것은 아니다. 코플러분포함수와 각 확률변수의 주변확률밀도함수가 절대 연속(absolutely continuous)이면, 식 (2.1)을  $y_1, \dots, y_n$ 에 대하여 미분하여 다음과 같은 다변량결합확률밀도함수(multivariate joint probability density function)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^n F(y_1, \dots, y_n)}{\partial y_1 \cdots \partial y_n} = \frac{\partial^n C(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n))}{\partial F_1(y_1), \dots, \partial F_n(y_n)} \prod_{i=1}^n f_i(y_i) \quad (2.2)$$

식 (2.2) 우변의 첫 번째 항은 코플러확률밀도함수(copula probability density function)를 나타낸다. 식 (2.1)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (2.3)$$

여기에서  $u_i, i = 1, \dots, n$ 은  $u_i = F_i(y_i)$ 로 확률변수  $y_i$ 의 확률적분변환(probability integral transform)<sup>1</sup>을 나타낸다. 식 (2.3)은 다변량확률분포함수를 이용하여 코플러함수를 유도할 수도 있음을 보여준다. 이와 같은 방법으로 얻어지는 코플러함수의 예로는 가우시언 코플러(Gaussian copula)와 스튜던트  $t(v)$ 코플러(Student-t copula) 등이 있다.

코플러는 타원분포를 따르는 확률변수들의 선형 연관성 측도인 피어슨 상관계수가 가지는 한계를 극복할 수 있는 연관성측도를 제공한다. 피어슨 상관계수가 가지는 한계점 가운데 하나는 비선형강증가변환(nonlinear strictly

<sup>1</sup> 본 논문에서 특별한 언급이 없는 한  $C$ 는 코플러분포함수,  $c$ 는 코플러확률밀도함수, 그리고  $u$ 는 확률적분변환을 나타낸다.

increasing transformation)에 대하여 불변(invariant)이 아니라는 점이다<sup>2</sup>. 코플러기반 연관성 측도는 피어슨 상관계수가 가지는 이러한 한계점들을 극복할 수 있다. 대표적인 코플러기반 연관성 측도로는 Kendall과 Spearman의 순위상관계수  $\tau^K$ 와  $\rho^S$ 가 있다.  $\tau^K$ 와  $\rho^S$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\tau^K(y_1, y_2) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ \rho^S(y_1, y_2) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2\end{aligned}\quad (2.4)$$

식 (2.4)의 순위상관계수  $\tau^K$ 와  $\rho^S$ 는 코플러함수에 따라 정의되지 않을 수도 있음에 주의할 필요가 있다.

코플러함수는 종류에 따라 다양한 비대칭적 연관성과 꼬리 연관성을 설명할 수 있다. 포트폴리오 리스크관리에서 중요한 의미를 가지는 연관성 측도인 꼬리 연관성 측도는 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_L = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \quad (2.5)$$

$$\lambda_U = \lim_{u \uparrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (2.6)$$

식 (2.5)와 식 (2.6)의 극한이 존재하는 경우  $\lambda_L$ 는 분포의 하단 꼬리 연관성을,  $\lambda_U$ 는 상단 꼬리 연관성을 나타낸다. 꼬리 연관성이 존재하지 않으면  $\lambda_L = 0$ ,

<sup>2</sup> 연관성 측도로서 피어슨 상관계수가 가지는 한계점에 대한 자세한 논의는 McNeil et al. (2005) Ch.5를 참고할 수 있다.

$\lambda_U = 0$ 이며, 꼬리 연관성이 존재하면  $\lambda_L \in (0, 1]$ ,  $\lambda_U \in (0, 1]$ 의 값을 가진다.

[표 2.1]과 [표 2.2]에는 본 연구에서 주로 다루게 될 연관성 파라미터가 하나인 2변량 코플러함수와 그 확률밀도함수, 그리고 각 파라미터의 정의역, 독립일 때의 연관성 파라미터 값, 비대칭성 유무, 순위상관계수, 꼬리 연관성 측도가 제시되어 있다. 가우시언 코플러, Frank 코플러, 그리고 스튜던트  $t$  코플러는 대표적인 대칭적 코플러함수이다. 그러나 꼬리 연관성을 가지지 않는 가우시언 코플러, Frank 코플러와 달리 스튜던트  $t$  코플러는 대칭적인 꼬리 연관성을 가지고 있다. 이들과 달리 Clayton코플러는 하단 꼬리 연관성(lower tail dependency)만을 가지며 Gumbel 코플러는 상단 꼬리 연관성(upper tail dependency)만을 가진다. [표 2.1]과 [표 2.2]를 통해서 알 수 있듯이 코플러함수에 따라 비대칭적 연관성과 꼬리 연관성이 존재하지 않을 수 있다. 따라서 자산 수익률들의 연관성을 충분히 설명하기 위해서는 코플러함수의 선택이 중요한 의미를 가지게 된다. 특히, 리스크 관리에서는 하단 꼬리 연관성에 중점을 두므로 상단 꼬리 연관성을 가지는 코플러를 이용하기 위해서는 다음과 같이 정의되는 회전코플러(rotated copula)를 이용할 수 있다.

$$\hat{C}(u_1 u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1 \quad (2.7)$$

식 (2.7)의 회전코플러의 확률밀도함수는  $c(1 - u_1, 1 - u_2)$ 이다. 식 (2.7)의 회전코플러는 원래의 코플러함수를 180도 회전한 것에 해당한다. 따라서 상단 꼬리 연관성을 가지는 Gumbel 코플러를 회전하면 하단꼬리 연관성을 가지는 회전 Gumbel 코플러함수를 얻을 수 있다.

[표 2.1]에 수록된 코플러들을 포함하는 다양한 코플러함수들의 특성에 대한 보다 자세한 논의는 Joe (1997, 2015), Cherubini et al. (2004), Nelson (2006)

등을 참조할 수 있다.

## 2.2 조건부코플러모형

일반적으로 자산수익률의 조건부분산이 시변(time-varying)하는 것과 같이 자산수익률들간의 연관성 또한 시변하는 특징을 가지고 있다(Longin and Solnik (1995), Engle (2002), Tse and Tsui (2002)). 이는 Patton (2006)은 연관성 파라미터가 시변하는 조건부 동태 코플러모형(conditional dynamic compula models)을 제시하였다.

$$F_t(y_{1t}, \dots, y_{mt} \mid \mathfrak{S}_{t-1}) = C_t(F_{1t}(y_{1t} \mid \mathfrak{S}_{t-1}), \dots, F_{1t}(y_{mt} \mid \mathfrak{S}_{t-1}) \mid \mathfrak{S}_{t-1}) \quad (2.8)$$

식 (2.8)에서  $\mathfrak{S}_{t-1}$ 는  $t-1$ 시점까지 이용가능한 정보집합을 나타낸다. 식 (2.8)의 조건부 코플러함수에서 개별 주변분포와 코플러함수가 동일한 정보집합에 의존한다는 점에 주의할 필요가 있다. Patton (2006)은 식 (2.8)과 같은 개별 수익률의 조건부분산 방정식을 GARCH모형(generalized autoregressive conditional heteroskedastic model)으로 설정하고 조건부 코플러모형의 연관성 파라미터 역시 GARCH모형과 유사한 자기회귀형태(Autoregressive form)의 동태방정식을 제시하였다.

Patton (2006)은 가우시언 코플러와 같은 타원분포의 연관성 파라미터의 동학을 다음과 같이 설정하였다.

$$\rho_t = \Lambda_1 \left( \omega + \beta \rho_{t-1} + \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi^{-1}(u_{1,t-1}) \Phi^{-1}(u_{2,t-1}) \right) \quad (2.9)$$

여기에서  $\Lambda_1 = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 의 역피셔변환(inverse Fisher transform)으로 연관성 측도

인 상관계수를  $[-1, 1]$ 의 구간 값을 가지도록 변환하는 변환함수(link function)이다. 비타원분포의 연관성 측도의 경우, Patton (2006)은 다음과 같이 동태방정식을 설정하였다.

$$\theta_t = \Lambda_2 \left( \omega + \beta \theta_{t-1} + \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |u_{1,t-1} u_{2,t-1}| \right) \quad (2.10)$$

여기에서  $\Lambda_2(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ 이다. 이와 같은 연관성 측도 변환함수는 Patton (2006)에서 비타원분포 코플러(non-elliptical distribution copula)로 SJC(symmetrized Joe-Clayton copula)를 이용하는 것에 따른 것이다. 식 (2.10)에서 우측 세 번째 항이 연관성과 부의 관계를 가지고 있음에 주의할 필요가 있다. 식 (2.9)와 식 (2.10)과 같은 연관성 파라미터 동태방정식은 GARCH모형과 같이 전기 확률적분변환의 확정함수이므로 추정이 쉽다는 장점을 가지고 있지만, 비선형ARMA방정식(nonlinear autoregressive moving average equation)이므로  $MA(\infty)$ 형태로 변환하였을 때 복잡한 비선형함수의 합성함수형태를 가지므로 그 특성을 파악하기 어렵다는 단점이 있다. 이러한 문제점을 완화하기 위해 식 (2.9)와 식 (2.10)의 우변의 두 번째항을 각각  $\beta \Lambda_1^{-1}(\rho_t)$ ,  $\beta \Lambda_2^{-1}(\theta_t)$ 와 같이 역변환 할 수 있다.

Creal et al. (2012, 2013)은 GARCH 등과 같은 적률에 기반을 둔 동태모수 방정식(dynamic parameter equation)보다 일반적인 로그확률밀도함수의 스코어에 기반을 둔 GAS모형(generalized autoregressive score models)을 제시하였다. 일반적인 시변파라미터 벡터를  $\alpha_t$ 라 하면 GAS(p,q)방정식은 다음과 같이 설정된다.

$$\alpha_t = d + \sum_{i=1}^q a_i s_{t-i} + \sum_{j=1}^p b_j \alpha_{t-j} \quad (2.11)$$

[표 2.1] 코플러와 코플러확률밀도함수

Copula	Density
$C_{Gaussian}(u_1, u_2, \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dy_1 dy_2$ $-1 \leq \rho \leq 1, y_i = \Phi^{-1}(u_i), i = 1, 2$	$c_{Gaussian}(u_1, u_2, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho y_1 y_2 - y_1^2 - y_2^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right)$
$C_{Student}(u_1, u_2, \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{t_V^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_V^{-1}(u_2)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\nu/2)\pi\nu\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dy_1 dy_2$ $-1 \leq \rho \leq 1, \nu > 2, y_i = t_V^{-1}(u_i), i = 1, 2$	$c_{Student}(u_1, u_2, \rho, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})^2\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \left(1 + \frac{y_1^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left(1 + \frac{y_2^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}$
$C_{Clayton}(u_1, u_2, \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$ $\theta > 0$	$c_{Clayton}(u_1, u_2, \theta) = u_1^{-(1-\theta)} u_2^{-(1-\theta)} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-(2-\frac{1}{\theta})} (1+\theta)$
$C_{Frank}(u_1, u_2, \theta) = -\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u_1) - 1)(\exp(-\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1}\right)$ $\theta \neq 0$	$c_{Frank}(u_1, u_2, \theta) = \frac{\exp((1+u_1+u_2)\theta)(\exp(\theta)-1)\theta}{[\exp(\theta) + \exp((u_1+u_2)\theta) - \exp(\theta+u_1\theta) - \exp(\theta+u_2\theta)]^2}$
$C_{Gumbel}(u_1, u_2, \theta) = \exp\left(-\left[(-\log(u_1))^\theta + (-\log(u_2))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$ $\theta > 1$	$c_{Gumbel}(u_1, u_2, \theta) = \frac{[\log(u_1)\log(u_2)]^{(\theta-1)} \left\{ \left[(-\log(u_1))^\theta + (-\log(u_2))^\theta\right]^{1/\theta} + \theta - 1 \right\}}{\left[(-\log(u_1))^\theta + (-\log(u_2))^\theta\right]^{(2-1/\theta)} u_1 u_2} \times C_{Gumbel}(u_1, u_2, \theta)$
$C_{Plackett}(u_1, u_2, \theta) = \frac{1+(\theta-1)(u_1+u_2) - \sqrt{[1+(\theta-1)(u_1+u_2)]^2 - 4\theta(\theta-1)u_1 u_2}}{2(\theta-1)}$ $\theta \geq 0$	$c_{Plackett}(u_1, u_2, \theta) = \frac{\theta[1+(u_1-2u_1 u_2+u_2)(\theta-1)]}{\left([1+(\theta-1)(u_1+u_2)]^2 - 4u_1 u_2 \theta(\theta-1)\right)^{\frac{3}{2}}}$

주) 표에서  $\rho$ 와  $\theta$ 는 각 해당 코플러함수의 연관성 파라미터를, 그리고  $\Phi^{-1}(\cdot)$ 과  $t_V^{-1}(\cdot)$ 는 각각 표준정규분포와 자유도  $\nu$ 의 표준  $t$ 분포함수의 역함수를 나타낸다.

[표 2.2] 코플러함수의 특성

Copula	Dependence Parameter	Independence	Symmetry or Asymmetry	Spearman's $\rho^s$	Kendall's $\tau^k$	$\lambda_L$	$\lambda_U$
Gaussian	$-1 \leq \rho \leq 1$	0	symmetric	$\frac{6}{\pi} \sin^{-1}(\rho/2)$	$\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\rho)$	0	0
Student-t	$-1 \leq \rho \leq 1, v > 2$	$(0, \infty)$	symmetric	NA	$\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\rho)$	$2t_{v+1} \left( \sqrt{(v+1) \frac{\rho-1}{\rho+1}} \right)$	$2t_{v+1} \left( \sqrt{(v+1) \frac{\rho-1}{\rho+1}} \right)$
Clayton	$\theta > 0$	0	asymmetric	NA	$\frac{\theta}{\theta+2}$	$2^{-1/\theta}$	0
Frank	$\theta \neq 0$	0	symmetric	$1 - 12 \frac{(D_1(\theta) - D_2(\theta))}{\theta}$	$1 - 4 \frac{(1 - D_1(\theta))}{\theta}$	0	0
Gumbel	$\theta > 1$	1	asymmetric	NA	$\frac{\theta-1}{\theta}$	$2 - 2^{-1/\theta}$	
Plackett	$\theta \geq 0$	1	symmetric	$\frac{\theta^2 - 2\theta \log \theta - 1}{(\theta-1)^2}$	NA	0	0

김태형, 박정민

주) 표에서  $\rho$ 와  $\theta$ 는 각 해당 코플러함수의 연관성 파라미터를 나타낸다. 그리고  $D_K(x)$ 는  $D_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t-1} dt, & \text{if } x \geq 0 \\ \frac{k|x|}{1+k} + \frac{k}{|x|^k} \int_x^0 \frac{t^k}{e^t-1} dt, & \text{if } x < 0 \end{cases}$  인 Debye함수이다(Abramowitz and Stegun (1972)).  $\rho^s$ 와  $\tau^k$ 에서 NA는 해당 상관계수가 정의되지 않음을 의미한다. 그리고  $t_v(\cdot)$ 는 자유도  $v$ 의 표준t분포함수를 나타낸다.

$\dim(\alpha_t) = k$ 라 하면, 식 (2.11)에서  $d$ 는  $k$ 차원 벡터,  $\{a_i, i = 1, \dots, q\}$ 와  $\{b_j, j = 1, \dots, p\}$ 는 각각  $(k \times k)$ 행렬의 동태방정식의 파라미터들을 나타낸다.  $\{b_j, j = 1, \dots, p\}$ 에는  $\alpha_t$ 의 안정성을 위한 제약이 부과되어야 한다. 그리고 GAS(p,q)방정식의 추진력(driving force)이 되는  $s_t$ 는 다음과 같이 스케일 조정된 스코어벡터를 나타낸다.

$$s_t = S_t(\alpha_t) \cdot \nabla_t(\alpha_t), \quad \nabla_t(\alpha_t) = \frac{\partial \ln p(y_t | \alpha_t, \mathfrak{S}_t; \psi)}{\partial \alpha_t}, \quad S_t(\alpha_t) = S(t, \alpha_t, \mathfrak{S}_t; \psi) \quad (2.12)$$

여기에서  $\mathfrak{S}_t$ 는  $t$ 기까지의 정보집합을, 그리고  $\psi$ 는 모형에 포함된 파라미터들을 나타낸다. 식 (2.12)에서  $\ln p(y_t | \alpha_t, \mathfrak{S}_t; \psi)$ 는 시변파라미터가 주어졌을 때의 관측치 로그우도함수를 나타낸다. GAS모형에서도 시변파라미터가 주어진 분석모형의 파라미터 정의역에 부합하도록  $\alpha_t$ 를 변환하는  $\theta_t = \Lambda(\alpha_t)$ 의 변환함수가 필요할 수 있다. 식 (2.12)에서  $S_t(\alpha_t)$ 는 스코어벡터  $\nabla_t(\alpha_t)$ 를 스케일 조정하는  $(k \times k)$ 행렬이다. Creal et al. (2012, 2013)은  $S_t(\alpha_t)$ 를 다음과 같이 설정할 것을 제안하고 있다.

$$S_t(\alpha_t) = I_t(\alpha_t)^{-s}, \quad I_t(\alpha_t) = E [\nabla_t(\alpha_t) \nabla_t(\alpha_t)' | \mathfrak{S}_{t-1}] \quad (2.13)$$

여기에서  $I_t(\alpha_t)$ 는 스코어벡터의 외적으로 구한 정보행렬(information matrix)을 나타낸다. 식 (2.13)에서 모형에 따라  $s = 1/2$  또는  $s = 1$ 의 값으로 설정할 수 있다. 코풀리함수를 이용하여 확률변수들 간의 연관성 동학을 모형화하는 경우, 시변파라미터가 적절한 범위의 값을 가지도록 변환하는  $\theta_t = \Lambda(\alpha_t)$ 의 변환함수가 필요하며, 이에 따라 식 (2.13)에서 이용되는 스코어와 정보행렬



또한 적절한 변환이 필요하다(Creal et al. (2013)).

2변량 가우시언 코플러  $C_{Gaussian}(u_1, u_2, \rho_t)$ 와  $t$ 코플러  $C_{Student}(u_1, u_2, \rho_t, \nu)$ 의 경우 식 (2.12)와 식 (2.13)의 스코어벡터와 정보행렬은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \nabla_t(\rho_t) = \frac{(1+\rho_t^2)((y_{1t}y_{2t}-\rho_t)-\rho_t(y_{1t}^2+y_{2t}^2-2))}{(1-\rho_t^2)^2} \\ I_t(\rho_t) = \frac{1+\rho_t^2}{(1-\rho_t^2)^2} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \nabla_t(\rho_t) = \frac{(1+\rho_t^2)((w_t y_{1t} y_{2t} - \rho_t) - \rho_t (w_t (y_{1t}^2 + y_{2t}^2) - 2))}{(1-\rho_t^2)^2} \\ I_t(\rho_t) = \frac{\nu+2+\nu\rho_t^2}{(\nu+4)(1-\rho_t^2)^2} \end{cases} \quad (2.15)$$

식 (2.14)와 식 (2.15)에서  $y_{it}$ ,  $i = 1, 2$ 는 각각  $y_{it} = \Phi^{-1}(u_{it})$ ,  $i = 1, 2$ 와  $y_{it} = t_{\nu}^{-1}(u_{it})$ ,  $i = 1, 2$ 이며,  $w_t = (\nu + 2) / \left( \nu + \frac{y_{1t}^2 + y_{2t}^2 - 2\rho_t y_{1t} y_{2t}}{1-\rho_t^2} \right)$ 이다. 식 (2.14)와 식 (2.15)는  $\rho_t = \frac{1-e^{-\alpha_t}}{1+e^{-\alpha_t}}$ 의 변환함수를 적용한 것이다. 다변량  $t$ 코플러모형에서 Creal et al. (2011)은  $s = 1$ 을 이용하고 있다. 그러나  $C_{Gaussian}(u_1, u_2, \rho_t)$ 와  $C_{Student}(u_1, u_2, \rho_t, \nu)$ 의 경우,  $s = 1/2$ 의 값을 설정하는 것이 보다 안정적인 추정치를 얻는데 도움이 된다. 일반적인 코플러의 경우 스코어와 정보행렬을 해석적으로 구하기 어려우므로 수치적인 방법을 이용하여야 한다(Creal et al. (2013)).

Hafner and Manner (2012)는 확률변동성모형(stochastic volatility model)과 같이 코플러모형의 연관성 파라미터 동태방정식이 독자적인 교란항을 가지는 확률코플러모형(stochastic copula autoregressive model)을 제안하였다. 확률코플러모형에서 코플러선택에 따른 변환함수가 적용되지 않은 시변파라미터 동태방정식은 다음과 같이 설정된다.

$$\alpha_{t+1} = \mu + \phi(\alpha_t - \mu) + \sigma_{\eta} \eta_t, \quad \eta_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (2.16)$$

여기에서  $\mu$ 는  $\alpha_t$ 의 장기평균을,  $\phi$ 는 지속성 파라미터를,  $\sigma_\eta$ 는 표준편차를, 그리고  $i.i.d.N(0, 1)$  독립적이고 동일한 분포를 따르는 표준정규분포를 나타낸다. 식 (2.16)은 확률변동성모형에서와 마찬가지로 시변 연관성 파라미터가 미관측 상태변수(latent state variable)이다. 따라서 확률코플러모형은 비선형 비정규 상태공간모형(nonlinear nonnormal state space model)으로 볼 수 있다.

Hafner and Manner (2012)는 Manner and Seger (2011)의 타원분포 혼합코플러모형(mixtures of elliptical copula models)의 꼬리 연관성이 가지는 ‘near asymptotic dependence’ 특성에 대한 연구결과를 바탕으로 가우시언 확률코플러모형이 연관성 파라미터가 고정된 코플러모형이 포착하는 극단적인 꼬리 연관성을 포착할 수 있다고 주장하였다. Manner and Seger (2011)는 Ledford and Tawn (1996)의 ‘near asymptotic independence’와 대비되는 ‘near asymptotic dependence’를 다음과 같이 정의하였다.

$$u^{1+\varepsilon} \ll C(u, u) \ll u \text{ as } u \downarrow 0 \forall \varepsilon > 0 \quad (2.17)$$

식 (2.17)에서  $a(u) \ll b(u)$ 는  $u \downarrow 0$ 에 따라  $a(u)/b(u) \rightarrow 0$ 임을 의미한다. 식 (2.17)은  $u \downarrow 0$ 에 따라 꼬리 연관성 즉, 식 (2.5)의 한단 꼬리 연관성  $\Lambda_L$ 이 극단적으로 느리게 수렴함을 의미한다. 따라서 상관계수가 고정된 가우시언코플러는 꼬리 연관성을 보이지 않지만 식 (2.7)과 같은 확률동태방정식(stochastic dynamic equation)을 따르는 가우시언 확률코플러모형이 극단적인 꼬리 연관성을 포착할 수 있음을 의미한다. Hafner and Manner (2012)는 이와 같은 성질을 가지는 가우시언 확률코플러모형으로 연관성 파라미터가 고정된 코플러모형이 포착하는 극단적인 꼬리 연관성을 포착할 수 있다고 주장하고 이러한 주장과 부합하는 실증분석 결과를 제시하였다.

우도함수에 기반을 둔 일반적인 코플러모형에 대한 추론 방법은 식 (2.2)에서와 같이 다변량확률밀도함수가 코플러확률밀도함수와 개별 확률변수의 주변확률밀도함수로 분해되는 성질을 이용한다. 본 연구는 2변량 확률코플러모형을 다룰 것이므로 2변량 코플러모형을 기준으로 로그우도함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln L(y_1, y_2, \boldsymbol{\psi}_m, \boldsymbol{\psi}_c) &= \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(y_{1t} | \mathcal{S}_{t-1}, \boldsymbol{\psi}_m^{(1)}), F_2(y_{2t} | \mathcal{S}_{t-1}, \boldsymbol{\psi}_m^{(2)}) | \mathcal{S}_{t-1}, \boldsymbol{\psi}_c) \\ &+ \sum_{t=1}^T \left( \ln L(y_{1t} | \mathcal{S}_{t-1}, \boldsymbol{\psi}_m^{(1)}) + \ln L(y_{2t} | \mathcal{S}_{t-1}, \boldsymbol{\psi}_m^{(2)}) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

여기에서  $\boldsymbol{\psi}_c$ 는 코플러확률밀도함수에 포함된 파라미터를,  $\boldsymbol{\psi}_m = \{\boldsymbol{\psi}_m^{(1)}, \boldsymbol{\psi}_m^{(2)}\}$ 는 주변확률밀도함수에 포함된 파라미터를 나타낸다. 식 (2.18)은 확률변수들의 결합로그우도함수가 코플러의 로그우도함수와 개별적인 확률변수의 로그우도함수로 분해될 수 있음을 의미한다. 최우추정법으로 추정할 경우, 식 (2.18)의 로그우도함수를 최적화하는 것이 효율적이다. 그러나 이 경우 계산상의 부담이 클 수 있으므로 일반적으로 식 (2.18)의 2행에 포함된 개별 확률변수 모형의 파라미터를 먼저 추정한 다음, 이를 주어진 것으로 가정하고 1행의 코플러로그우도함수를 최적화하는 2단계-최우추정법이 이용된다. 2단계-최우추정법으로 추정하는 경우 효율성 상실(loss of efficiency)이 있을 수 있다. 2단계-최우추정에 따른 효율성 상실을 줄이기 위하여 2단계-최우추정치를 얻은 후 추가적으로 결합로그우도함수에 대하여 1단계 Newton-Rhapson 알고리즘을 적용하는 방법이 이용될 수 있다.

Almeida and Czado (2012)는 연관성 파라미터가 양과 음의 연관성을 포착할 수 있도록 Kendall 순위상관계수를  $\tau_r^K$  중심으로 식 (2.16)을 따르는  $\alpha_r$

에 대한 변환함수를 이용하였다. [표 2.2]에서 알 수 있듯이 Clayton코플러와 Gumbel코플러는 항상  $\tau_i^K > 0$ 이므로 Almeida and Czado (2012)는  $\tau_i^K \in [-1, 1]$ 이 되는 가우시언코플러, 더블Clayton코플러, 더블Gumbel코플러에 대한 베이지언 알고리즘을 제시하였다. 더블Clayton코플러와 더블Gumbel코플러는 Clayton코플러와 Gumbel코플러를 90도 회전한 코플러에 해당한다. Almeida and Czado (2012)는  $\tau_i^K \in [-1, 1]$ 가 성립하도록 먼저  $\alpha_t$ 에 역피셔변환(inverse Fisher transform)을 적용하여  $\tau_i^K$ 를 얻은 다음 해당 코플러의 연관성 파라미터  $\theta_t$ 와  $\tau_i^K$ 의 함수관계의 역함수를 취하는 방법을 이용하였다. 즉, 연관성 파라미터  $\theta_t = \tau_i^{K-1}(\Lambda(\alpha_t))$ 의 합성변환함수(composite link function)를 이용하였다. 이러한 다소 복잡한 비선형변환으로 인해 사후표본추출의 효율성 상실이 있을 수 있다. Almeida and Czado (2012)는 상태변수  $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 에 대한 효율적인 사후표본추출을 위해 Liu and Sabatti (2000)의 MGMC알고리즘(multigrid Monte Carlo algorithm)을 이용하는 CGMC알고리즘(coarse grid Monte Carlo algorithm)을 이용하였다. CGMC알고리즘은 상태변수의 사전확률밀도함수를 후보생성확률밀도함수(candidate generating density)로 이용하는 MH알고리즘(Metropolis-Hastings algorithm)으로 생성된 사후표본에 대해 추가적인 부분변환(Metropolized partial resampling transform)을 적용하는 사후표본추출 방법이다.

앞서 살펴본 Patton (2006) Copula-GARCH과 Creal et al. (2011, 2013)의 GAS모형에서는 시변 연관성 파라미터가 전기정보의 확정함수이므로 코플러 로그우도함수를 쉽게 계산할 수 있으므로 추정이 비교적 쉽다는 장점이 있다. 그러나 미관측 상태변수를 가지는 확률변동성모형 추정에서와 마찬가지로 확률코플러모형을 최우추정법으로 추정하기 위해서는 미관측상태변수인 시변 연관성 파라미터를 적분소거(integration-out)하는 것이 필요하다. Hafner and

Manner (2012)은 Lisenfeld and Richard (2003), Richard and Zhang (2007)에서 제시된 EIS(efficient importance sampling)를 이용한 SML추정법(simulated maximum likelihood estimation method)을 이용하였다.

이상에서 살펴본 시변 연관성 파라미터 모형들 이외에도 다양한 모형들이 제시되었다. Engle (2002), Tse and Tsui (2002)의 DCC모형(dynamic conditional correlation model)을 대표적인 시변 연관성 파라미터 모형으로 볼 수 있다. Heinen and Valdesogo (2009)는 Bedford and Cooke (2002)의 표준줄기 코플러(Cannonical Vine Copula)를 이용하여 2변량코플러모형을 다변량코플러모형으로 확장하면서 DCC모형을 Kendall 순위상관계수  $\tau_i^K$ 의 동태방정식으로 이용하였다. Manner and Reznikova (2012), Patton (2013)은 다양한 시변 연관성 파라미터 코플러모형에 대한 추정법 및 진단방법에 대한 포괄적인 서베이를 제시하였다. 이상에서 논의되지 않은 다양한 동태모형에 대한 논의는 Manner and Reznikova (2012)와 Patton (2013)을 참고할 수 있다.

### 3. 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론

#### 3.1 확률코플러모형

본 연구는 Hafner and Manner (2012)의 2변량-확률코플러모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘을 제시하고자 한다. 본 연구에서 다루는 코플러는 [표 2.1]에 수록된 6개의 코플러함수이다. 논의의 편의를 위해 확률코플러모형을 다음과 같이 다시 쓰기로 한다.

$$\begin{cases} p(u_{1t}, u_{2t} \mid \alpha_{1:t}, U_{t-1}, \Psi_c) = c(u_{1t}, u_{2t} \mid \Lambda(\alpha_t), \Psi_c') \\ \alpha_{t+1} = \mu + \phi(\alpha_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t, \quad \eta_t \sim i.i.d.N(0, 1) \\ \alpha_1 \sim N(\mu, \sigma_\eta^2 / (1 - \phi^2)) \end{cases} \quad (3.1)$$

여기에서  $\alpha_{1:t} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ ,  $U_{1:t} = \{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{1,t-1}, u_{2,t-1}\}$ 이며,  $\Psi_c'$ 는  $t$ 코플러에 포함된 추가적인 파라미터인 자유도  $\nu$ 를 나타낸다. 식 (3.1)에서 첫 번째 방정식은 비선형비정규 상태공간모형의 관측치 방정식에 해당하는 코플러확률밀도함수를 나타내며, 두 번째 방정식은 비관측 상태변수의 상태방정식을 나타낸다. 식 (3.1)에서  $u_{it} = F_i(y_{it}, \hat{\Psi}_m^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ 의 확률적분변환을 나타낸다. 식 (3.1)의 첫 번째 방정식은 미관측 상태변수가 주어졌을 때 관측치에 해당하는  $\{u_{1t}, u_{2t}\}$ 가 조건부 독립임을 의미한다. 그리고 상태변수의 안정성을 보장하기 위하여  $|\psi| < 1$ 의 안정성 제약이 부과된다. 식 (3.1)의 확률코플러모형은 시변 연관성 파라미터의 동학만을 설명하는 모형이다. 따라서 코플러모형의 관측치에 해당하는  $u_{it} = F_i(y_{it}, \hat{\Psi}_m^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ 에 모형설정 오류가 없다는 가정이 암묵적으로 부과된 모형이다<sup>3</sup>

본 연구는 Almeida and Czado (2012)와 달리 식 (3.1)의 관측치 방정식에 해당하는 코플러확률밀도함수를 근사하여 상태변수  $\alpha_t$ 의 사후표본추출을 위한 후보생성확률밀도함수를 얻는 방법을 이용한다. 본 연구에서 제시하는 사후표본추출알고리즘은 [표 2.1]에 수록된 6개의 코플러에 대해 일반적으로 적용할 수 있는 알고리즘이다. [표 3.1]에는 [표 2.1]에 수록된 코플러들의 연관성

<sup>3</sup> 2단계-최우추정치가 일치성을 가짐이 알려진 것과 달리 베이지언 추론에서 2단계추정이 일치성을 가진다는 이론적인 결과는 현재까지 제시된 바 없다. Almeida and Czado (2012)는 Czado (2011), Austin and Lopes (2010)의 베이지언 분석에서 개별 확률변수 모형을 추정하는 1단계 추정의 파라미터 추정에 따른 불확실성을 고려하지 않더라도 추정 결과가 크게 달라지지 않는다는 실증분석 결과에 바탕을 두고 베이지언 추론 알고리즘을 제시하였다. 본 연구에서도 Almeida and Czado (2012)와 마찬가지로 1단계 파라미터 추정 불확실성을 명시적으로 고려하지 않고 베이지언 추론 알고리즘을 제시한다.

파라미터가 정의역을 충족하도록 하는 변환함수들을 수록하였다. [표 3.1]에서  $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 으로 가우시언코플러와 t-코플러의 연관성 파라미터  $\rho_t$ 가  $\rho_t \in [-1, 1]$ 이 되도록 하는 역피셔변환(inverse Fisher transform)을 나타낸다. [표 3.1]에 수록된 변환함수는 일반적으로 이용되는 변환함수이다.

[표 3.1] 변환함수(link function)

	Gaussian	Student-t	Clayton	Frank	Gumbel	Plackett
$\lambda(\alpha_t)$	$\tanh(\alpha_t)$	$\tanh(\alpha_t)$	$\exp(\alpha_t)$	$\alpha_t$	$\exp(\alpha_t) + 1$	$\exp(\alpha_t)$

주) 표에서  $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 으로  $\rho_t = \tanh(\alpha_t) \in [-1, 1]$ 이 되도록 하는 역피셔변환(inverse Fisher transform)을 나타낸다.

### 3.2 사전확률분포

식 (3.1)의 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론을 위해서는 모형에 포함된 파라미터들의 사전확률밀도함수 설정이 필요하다. 본 연구에서는 다음과 같은 파라미터들에 대한 사전확률밀도함수를 설정하였다.

$$\begin{cases} \pi(\mu) = N(b_{0\mu}, B_{0\mu}) \\ \pi(\phi) = TN_{(-1,1)}(b_{0\phi}, B_{0\phi}) \\ \pi(\sigma_\eta^2) = IG(n_0/2, s_0/2) \\ (\pi(v) = G(n_{00}, s_{00}) I(v > 2)) \end{cases} \quad (3.2)$$

여기에서  $N(a, b)$ 는 평균과 분산이  $a$ 와  $b$ 인 정규분포를,  $TN_{(l,u)}(a, b)$ 는 상한과 하한이 각각  $l$ 과  $u$ 이고 평균과 분산이  $a$ 와  $b$ 인 절단정규분포(truncated normal distribution)를,  $IG(c, d)$ 는 형태파라미터가  $c$ 이고 스케일파라미터가  $d$ 인 역감마분포(inverse gamma distribution)를, 그리고  $G(e, f)$ 는 형태파라미터가  $e$ 이고

스케일파라미터가  $f$ 인 감마분포(gamma distribution)를 나타낸다<sup>4</sup>. 식 (3.2)에서  $\pi(\nu)$ 는 t코플러모형을 추정하는 경우에만 이용된다.  $I(\nu > 2)$ 는  $\nu > 2$ 의 제약이 부과된 것을 의미한다.

### 3.3 사후표본추출

베이즈정리를 이용하면, 확률코플러모형의 파라미터  $\psi_{\mathbf{c}} = \{\mu, \psi, \sigma_{\eta}^2, \nu\}$ 와 미관측상태변수  $\alpha_{t=1}^T$ 의 결합사후확률밀도함수(joint posterior probability density function)를 다음과 같이 우도함수와 사전확률밀도함수의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\pi(\psi_{\mathbf{c}}, \{\alpha_t\}_{t=1}^T | \{u_t\}_{t=1}^T) \propto \tag{3.3}$$

$$p(\alpha_t | \mu, \phi, \sigma_{\eta}^2) \left\{ \prod_{t=2}^{T-1} p(u_t | \alpha_t, \nu) p(\alpha_{t+1} | \alpha_t, \psi_{\mathbf{c}}) \right\} p(u_{1T}, u_{2T} | \alpha_T, \nu) \pi(\psi_{\mathbf{c}})$$

여기에서  $u_t = (u_{1t}, u_{2t})$ 이며,  $p(u_t | \alpha_t, \cdot)$ 은 코플러확률밀도함수,  $\pi(\psi_{\mathbf{c}}) = \pi(\mu)\pi(\psi)\pi(\sigma_{\eta}^2)\pi(\nu)$ 이다. 식 (3.3)으로부터 한꺼번에  $\psi_{\mathbf{c}}$ 와  $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 를 사후표본추출 할 수 없으므로 식 (3.1)의 확률코플러모형에 대한 사후표본추출은 다음과 같은 사후조건부확률밀도함수들로부터 순차적으로 사후표본을 생성하는 것이 된다.

<sup>4</sup> 본 논문에서 역감마분포와 감마분포는 각각 다음과 같은 확률커널(probability kernel)을 가지는 것으로 가정한다.  $p_{GI}(x; \alpha, \beta) \propto x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x)$ ,  $p_G(x; \alpha, \beta) \propto x^{(\alpha-1)} \exp(-\beta x)$



$$\begin{aligned}
& (i) \pi \left( \{\alpha\}_{t=1}^T \mid \{u_t\}_{t=1}^T, \psi_{\mathbf{c}} \right) \\
& (ii) \pi \left( \mu \mid \{u_t\}_{t=1}^T, \{\alpha_t\}_{t=1}^T, \psi_{\mathbf{c}-\mu} \right) \\
& (iii) \pi \left( \phi \mid \{u_t\}_{t=1}^T, \{\alpha_t\}_{t=1}^T, \psi_{\mathbf{c}-\phi} \right) \\
& (iv) \pi \left( \sigma_{\eta}^2 \mid \{u_t\}_{t=1}^T, \{\alpha_t\}_{t=1}^T, \psi_{\mathbf{c}-\sigma_{\eta}^2} \right)
\end{aligned}$$

여기에서  $\psi_{\mathbf{c}-a}$ 는  $a$ 를 제외한 나머지 파라미터들을 나타낸다.

### 3.3.1 미관측 상태변수 $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 의 사후표본추출

식 (3.3)으로부터 유도되는  $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi \left( \{\alpha_t\}_{t=1}^T \mid \{u_t\}_{t=1}^T \right) \propto p(\alpha_1) \left\{ \prod_{t=2}^{T-1} p(u_t \mid \alpha_t) p(\alpha_{t+1} \mid \alpha_t) \right\} p(u_{1T}, u_{2T} \mid \alpha_T) \quad (3.4)$$

식 (3.4)의 사후조건부확률밀도함수에서  $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 를 사후표본추출할 때 파라미터들은 주어진 것이므로 파라미터들을 생략하고 관측치와 상태변수의 확률밀도함수를 표기하였다. 식 (3.4)로부터 한꺼번에  $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 를 생성하는 것이 불가능하므로 한 번에 하나씩 사후표본을 생성하는 방법을 이용하기로 한다. 이를 위해  $t = 1, t = 2, \dots, T-1$ , 그리고  $t = T$ 시점을 구분하여 사후조건부확률밀도함수를 유도하는 것이 필요하다. 그런데 식 (3.4)를 보면 각 시점의  $\alpha_t$ 의 사후확률밀도함수가 다음과 같이 인접한 시점의 상태변수의 전이확률밀도함

수와 관측치  $u_t$ 의 확률밀도함수로 구성됨을 알 수 있다.

$$\begin{cases} \pi(\alpha_1 | u_1, \alpha_2) \propto p(u_1 | \alpha_1)p(\alpha_2 | \alpha_1)p(\alpha_1), & t = 1 \\ \pi(\alpha_t | u_t, \alpha_{t-1}, \alpha_{t+1}) \propto p(u_t | \alpha_t)p(\alpha_{t+1} | \alpha_t)p(\alpha_t | \alpha_{t-1}), & t = 2, \dots, T-1 \\ p(\alpha_T | u_T, \alpha_{T-1}) \propto p(u_T | \alpha_T)p(\alpha_T | \alpha_{T-1}), & t = T \end{cases} \quad (3.5)$$

여기에서  $u_t = (u_{1t}, u_{2t})$ 이다.  $\alpha_t$ 의 사후확률밀도함수가 식 (3.5)와 같으므로 각 시점의 사후확률밀도함수를 유도하기 위해서  $t = 1, t = 2, \dots, T-1$ , 그리고  $t = T$ 시점의  $\alpha_t$ 의 사전확률밀도함수에 해당하는 전이확률밀도함수들의 구성만 구분하면 됨을 알 수 있다. 식 (3.5)에서 각 시점의  $\alpha_t$ 의 사후확률밀도함수에 포함되는 사전확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\begin{cases} \pi(\alpha_1 | \alpha_2) = N(\hat{\alpha}_1 = \mu + \phi(\alpha_2 - \mu), \hat{\sigma}_{\alpha_1}^2 = \sigma_\eta^2), & t = 1 \\ \pi(\alpha_t | \alpha_{t-1}, \alpha_{t+1}) = N\left(\hat{\alpha}_t = \mu + \frac{\phi}{1+\phi^2}(\alpha_{t+1} + \alpha_{t-1} - 2\mu), \hat{\sigma}_{\alpha_t}^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{1+\phi^2}\right), & t = 2, \dots, T-1 \\ p(\alpha_T | \alpha_{T-1}) = N(\hat{\alpha}_T = \mu + \phi(\alpha_{T-1} - \mu), \hat{\sigma}_{\alpha_T}^2 = \sigma_\eta^2), & t = T \end{cases} \quad (3.6)$$

식 (3.6)을 보면 모든 시점의  $\alpha_t$ 의 사전확률밀도함수가 정규분포임을 알 수 있다. 그러므로 각 시점의 관측치 확률밀도함수  $p(u_{1t}, u_{2t} | \alpha_t)$ 를 정규분포로 근사하면 이를 식 (3.6)의 사전확률밀도함수와 결합하여  $\alpha_t$ 를 사후표본추출하는데 필요한 후보생성확률밀도함수를 얻을 수 있다.

다루기 어려운  $\alpha_t$ 의 사후조건부확률밀도함수를 2차 테일러전개를 이용하여 정규분포로 근사하는 방법은 Shephard and Pitt (1997), Durbin and Koopman (1997, 2000), So (2003), Jungbacker and Koopman (2007, 2009) 등에서 이용된 바 있다. 이들 연구에서는 공통적으로 사후조건부확률밀도함수가 상태변수에

대해 전역적으로 로그오목(globally log-concave)인 경우만을 고려하였다는 점과 사후조건부확률밀도함수 자체를 근사한다는 점에서 본 연구의 접근법과 다르다. 본 연구는 식 (3.5)의 사후조건부확률밀도함수에서 다루기 어려운 코플러확률밀도함수만을 근사하여 이를 식 (3.6)과 결합하는 방법으로 MH알고리즘에 필요한 후보생성확률밀도함수를 구한다. 그리고 코플러확률밀도함수가 항상 전역적으로 로그오목이 아닌 경우에도 이와 같은 방법을 적용할 수 있다는 점에서 기존 연구와 구분된다.

본 연구는 1단계-NR알고리즘을 이용하여  $\{p(u_t | \alpha_t)\}_{t=1}^T$ 을 정규분포로 근사하는 방법을 이용한다.  $\ln p(u_t | \alpha_t)$ 에 대하여 1단계-NR알고리즘을 적용하면 다음과 같이  $p(u_t | \alpha_t)$ 을 근사하는  $\alpha_t$ 의 정규분포 확률커널을 얻을 수 있다.

$$p(u_t | \alpha_t) \approx N(m_t, M_t) \quad (3.7)$$

여기에서  $m_t = \tilde{\alpha}_t + \left(-\frac{\partial^2 \ln(u_t | \alpha_t)}{\partial \alpha_t^2} \Big|_{\alpha_t = \tilde{\alpha}_t}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \ln(u_t | \alpha_t)}{\partial \alpha_t} \Big|_{\alpha_t = \tilde{\alpha}_t}\right)$ ,  $M = \left(-\frac{\partial^2 \ln(u_t | \alpha_t)}{\partial \alpha_t^2} \Big|_{\alpha_t = \hat{\alpha}_t}\right)^{-1}$ 이다<sup>5</sup>. 식 (3.7)의 1단계-NR알고리즘은 실질적으로 2차 테일러전개를 이용하여  $\ln p(u_t | \alpha_t)$ 을 근사하는 것이다. 식 (3.7)이 효율적인 근사가 되기 위해서는 1단계-NR알고리즘을 적용하는데 필요한 후보점  $\hat{\alpha}_t$ 를 선택하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 식 (3.6)의  $\alpha_t$ 사전확률밀도함수의 평균  $\hat{\alpha}_t$ 을 후보점  $\tilde{\alpha}_t$ 로 이용한다<sup>6</sup>. 합성곱의 법칙(convolution rule)을 이용하여 식 (3.6)과 식 (3.7)을

<sup>5</sup> 1단계 NR알고리즘을 적용하는데 필요한 로그코플러확률밀도함수의  $\alpha_t$ 에 대한 1계 및 2계도함수는 합성함수에 대한 도함수를 구하는 Faà di Bruno 법칙을 이용하여 쉽게 얻을 수 있다.  $(f \cdot g)(\alpha) = f(g(\alpha))$ 의 합성함수에 대한 1계 및 2계도함수는 다음과 같다.

$$(f \cdot g)^{(1)}(\alpha) = f^{(1)}(g(\alpha))g^{(1)}(\alpha)$$

$$(f \cdot g)^{(2)}(\alpha) = f^{(2)}(g(\alpha))\{g^{(1)}(\alpha)\}^2 + f^{(1)}(g(\alpha))g^{(2)}(\alpha)$$

여기에서 상첨자 ()안의 1과 2는 각각 1계 및 2계 도함수를 의미한다.

<sup>6</sup> 2차 테일러 전개를 이용하여  $\ln p(u_t | \alpha_t)$ 를 정규분포로 근사하기 위한 후보점을 선택하는

결합하면 다음과 같은 후보생성확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$q(\alpha_t) = N\left(\bar{M}_t \left( \frac{\hat{\alpha}_t}{\hat{\sigma}_{\alpha_t}^2} + \frac{m_t}{M_t} \right), \bar{M}_t\right) \quad (3.8)$$

여기에서  $\bar{M}_t = \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_{\alpha_t}^2} + \frac{1}{M_t} \right)^{-1}$  이다.

식 (3.8)을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 ARMH알고리즘으로  $\alpha_t$ 를 사후표본추출할 수 있다(Tierney (1994), Chib and Greenberg (1995)). ARMH 알고리즘은 효율적인 사후표본추출을 위해 MH알고리즘과 기각표본추출법 (acceptance-rejection sampling)을 결합하는 사후표본추출법이다. ARMH알고리즘은 Shephard and Pitt (1997), Watanabe (2000) 등에서 로그조건부분산을 생성하는 방법으로 이용되었다. 기각표본추출법(rejection sampling)으로 추출한 후보표본  $\alpha_t^*$ 를 MH채택확률(Metropolis-Hasting acceptance probability)로 채택하면 된다. 기각표본추출법과 MH알고리즘의 채택확률은 각각 다음과 같다.

$$\alpha_{AR}(\alpha_t^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\alpha_t^* | u_t, \cdot)}{q(\alpha_t^*)} \right\} \quad (3.9)$$

$$\alpha_{ARMH}(\alpha_t, \alpha_t^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\alpha_t^* | u_t, \cdot) \min \{ \pi(\alpha_t | u_t, \cdot), q(\alpha_t) \}}{\pi(\alpha_t | u_t, \cdot) \min \{ \pi(\alpha_t^* | u_t, \cdot), q(\alpha_t^*) \}} \right\}$$

여기에서  $\pi(\alpha_t | u_t, \cdot)$ 은 식 (3.5)의 각 시점  $\alpha_t$ 의 사후조건부확률밀도함수를 나타낸다.

---

가장 좋은 방법은 최적화를 이용하여 얻어지는 최빈값을 후보점으로 이용하는 것이다. 그러나 이와 같은 최적화를 이용하여 얻어지는 최빈값을 이용하는 방법은 계산상의 부담이 지나치게 큰 방법이므로 적합한 방법으로 볼 수 없다. 저자들은 식 (3.6)의  $\{\hat{\alpha}\}_{t=1}^T$  이외에 Eraker (2001)에서와 유사하게  $\frac{\alpha_{t-1} + \alpha_{t+1}}{2}$ 를 후보점으로 이용하는 방법을 고려하였으나,  $\{\hat{\alpha}\}_{t=1}^T$ 에 비해 성과가 좋지 않음을 확인할 수 있었다.  $\{\hat{\alpha}\}_{t=1}^T$ 를 후보점으로 이용하는 방법은 Pitt and Shephard (1999)의 APF에서 관측확률밀도함수를 근사하는 후보점을 선택하는 방법을 고려한 것이다.

이상에서 논의한  $\{\alpha_t\}_{t=1}^T$ 의 사후표본 생성과정에서 다루기 어려운 부분에 해당하는 관측치의 확률밀도함수를 1단계-NR알고리즘을 적용하여 근사적인 정규분포 확률커널을 얻는 방법이 이용되고 있다. 코플러확률밀도함수가  $\alpha_t$ 에 대하여 전역적 오목(globally concave)이 아니므로 1단계-NR알고리즘을 이용하는 근사에서 양의 확률로 2계도함수가 비음이 될 수 있다. 이 경우 NR알고리즘이 아닌 다른 최적화방법으로  $\ln p(u_t | \alpha_t)$ 의 최빈값을 찾는 방법을 이용할 수 있으나 최적화 시간이 많이 소요될 수 있다. 모형설정 오류가 심각하지 않다면,  $\alpha_t$ 의 사전확률밀도함수로부터 얻어지는 식 (3.6)의 예측치를 1단계-NR알고리즘의 후보점으로 이용하는 방법은 심각한 문제를 유발하지 않는다. 2계도함수가 비음이 되는 경우 1계도함수만을 이용하는 1단계-BHHH알고리즘(one step Berndt-Hall-Hall-Hausman algorithm)을 이용할 수 있다. 이 경우 식 (3.7)에서  $-\frac{\partial^2 \ln p(u_t | \alpha_t)}{\partial \alpha_t^2} \Big|_{\alpha_t = \tilde{\alpha}_t}$ 를  $\left( \frac{\partial \ln p(u_t | \alpha_t)}{\partial \alpha_t} \Big|_{\alpha_t = \tilde{\alpha}_t} \right)^2$ 으로 대체하게 된다. 2계도함수가 비음인 경우 이와 같이 1단계-BHHH알고리즘을 적용하여 얻은 정규분포 근사가 좋지 않을 수 있고 이에 따라 사후표본추출의 효율성 또한 좋지 않을 수 있다. 그러나 ARMH알고리즘에서는 근사가 좋지 않은 후보생성확률밀도함수 이용에 따른 표본추출의 비효율성이 MH채택확률을 통해서 조정될 수 있다. 예외적인 상황에서의 1단계-BHHH알고리즘을 이용한 근사가  $\alpha_t$ 의 사후표본추출의 전반적인 효율성을 심각하게 훼손하지 않음을 모의실험을 통해 확인할 수 있었다. 목표사후확률밀도함수(target posterior probability density function)에 대한 정규분포 근사를 이용하므로 근사의 정도(accuracy)에 따라 전반적인 사후표본추출의 효율성이 결정된다. 전반적인 사후표본추출의 효율성 훼손이 심각하지 않다는 것은 전반적인  $\alpha_t$  근사의 정도에 크게 영향을 미치지 않음을 의미한다.

### 3.3.2 파라미터 $\psi_c = \{\mu, \phi, \sigma_\eta^2, \nu\}$ 의 사후표본추출

$\{\alpha\}_{t=1}^T$ 가 주어진 경우, 쉽게 파라미터  $\psi_c = \{\mu, \phi, \sigma_\eta^2, \nu\}$ 의 사후표본을 생성할 수 있다.  $\mu$ 와  $\sigma_\eta^2$ 의 사후조건부확률밀도함수는 각각 다음과 같다.

$$\pi(\mu \mid \{\alpha\}_{t=1}^T, \phi, \sigma_\eta^2) = N(b_\mu, B_\mu) \quad (3.10)$$

$$\pi(\sigma_\eta^2 \mid \{\alpha\}_{t=1}^T, \phi, \mu) = IG\left(\frac{n_0 + T}{2}, \frac{s_0 + \sum_{t=2}^T (\alpha_t - \mu - \phi(\alpha_{t-1} - \mu))^2 + (1 - \phi^2)(\alpha_1 - \mu)^2}{2}\right) \quad (3.11)$$

식 (3.10)에서  $B_\mu = \left(\frac{1}{B_{0\mu}} + \frac{(1-\phi^2)+(T-1)(1-\phi)^2}{\sigma_\eta^2}\right)^{-1}$ ,  $b_\mu = B_\mu \left(\frac{b_{0\mu}}{B_{0\mu}} + \frac{\alpha_1(1-\phi^2)+(1-\phi)\sum_{t=2}^T(\alpha_t - \phi\alpha_{t-1})}{\sigma_\eta^2}\right)$ 이다.

$\phi$ 를 직접 사후표본추출 할 수 없으므로 MH알고리즘(Metropolis-Hastings) 알고리즘으로 생성할 수 있다. MH알고리즘의 후보생성확률밀도함수는 다음과 같다.

$$q(\phi) = TN_{(-1,1)}\left(B_\phi \left[ \frac{b_{0\phi}}{B_{0\phi}} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{t=2}^T (\alpha_t - \mu)(\alpha_{t-1} - \mu) \right], B_\phi \right) \quad (3.12)$$

여기에서  $B_\phi = \left(\frac{1}{B_{0\phi}} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{t=2}^T (\alpha_{t-1} - \mu)^2\right)$ 이다. 식 (3.12)의 후보생성확률밀도함수로부터 생성한 후보표본  $\phi^*$ 를 다음과 같은 채택확률로 채택하면 된다.

$$\alpha_{MH}(\phi, \phi^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(\alpha_1 | \mu, \phi^*, \sigma_\eta^2)}{p(\alpha_1 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2)} \right\} \quad (3.13)$$

$t$ 코플러의 경우, 자유도  $\nu$ 를 사후표본추출 하여야 한다.  $\nu$ 의 사후조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\pi(\nu | \{u_t, \alpha_t\}_{t=1}^T) \propto \prod_{t=1}^T p(u_t | \Lambda_t(\alpha_t), \nu) \pi(\nu) \quad (3.14)$$

식 (3.14)로부터 직접 사후표본추출 할 수 없으므로  $\nu$ 의 로그사후확률밀도함수의 최빈값(model)  $\hat{\nu}$ 에서 라플라스근사(Laplace approximation)를 이용하는 IMH알고리즘(independent Metropolis-Hastings algorithm)으로 사후표본을 생성할 수 있다. 후보생성확률밀도함수와 MH채택확률은 다음과 같다.

$$q(\nu) = TN_{(2, \infty)}(\hat{\nu}, V(\hat{\nu})), \quad V(\hat{\nu}) = - \left. \frac{\partial^2 \ln \pi(\nu | \{u_t, \alpha_t\}_{t=1}^T)}{\partial \nu^2} \right|_{\nu=\hat{\nu}} \quad (3.15)$$

$$\alpha_{MH}(\nu, \nu^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\nu^* | \{u_t, \alpha_t\}_{t=1}^T) q(\nu)}{\pi(\nu | \{u_t, \alpha_t\}_{t=1}^T) q(\nu^*)} \right\} \quad (3.16)$$

### 3.4 모형 진단과 비교를 위한 파티클필터

비선형비정규 상태공간모형인 확률코플러모형 진단과 비교를 위해 파티클필터를 이용할 수 있다. 금융시계열분석에서 파티클필터는 확률변동성모형 진단과 베이지언 모형비교에 필요한 PIT와 주변우도를 계산하는데 이용되었다(Kim et al. (1998), Chib et al. (2002), Chib et al. (2006), Omori et al. (2007))

등). 파티클필터<sup>7</sup>는 계산이 어렵거나 불가능한 상태변수의 예측 및 필터확률 밀도함수(predicted and filtered probability density function of state variables)를 가중이산표본(weighted discrete samples)으로 근사하는데 사용된다.

관측치벡터를  $y_t$ , 마르코프과정을 따르는 미관측상태변수벡터를  $\alpha_t$ 라 하면, 일반적인 상태공간모형은 다음과 같은 확률밀도함수로 표현될 수 있다.

$$\begin{cases} p(\alpha_1) \\ p(\alpha_{t+1} | \alpha_t), t = 1, \dots, T-1 \\ p(y_t | \alpha_t), t = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.17)$$

여기에서  $p(\alpha_1)$ 와  $p(\alpha_{t+1} | \alpha_t)$ 는 각각 상태변수의 초기확률밀도함수와 전이 확률밀도함수,  $p(y_t | \alpha_t)$ 는 관측확률밀도함수를 나타낸다. 확률밀도함수로 표현된 식 (3.17)은 식 (3.1)의 확률코풀러모형과 부합하는 구조를 가지고 있음을 알 수 있다. 식 (3.17)에서  $\{\alpha_t\}_{t=1}^n$ 가 주어졌을 때,  $\{y_t\}_{t=1}^n$ 들은 서로 독립인 것으로 가정된다. 상태변수에 대한 파티클필터링에서 파라미터는 주어진 것으로 가정되므로 식 (3.17)에서 파라미터를 생략하였다. 베이지정리를 이용하면  $t$ 기까지의 상태변수  $\alpha_{1:t}$ 의 필터확률밀도함수  $p(\alpha_{1:t} | Y_t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(\alpha_{1:t} | Y_t) = \frac{p(y_t | \alpha_t)p(\alpha_t | \alpha_{t-1})}{p(y_t | Y_{t-1})} p(\alpha_{1:t-1} | Y_{t-1}) \quad (3.18)$$

여기에서  $\alpha_{1:t} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ ,  $Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$ ,  $p(y_t | Y_{t-1}) = \int p(y_t | \alpha_t)p(\alpha_t | \alpha_{t-1})p(\alpha_{1:t-1} | Y_{t-1})d\alpha_{1:t}$ 이다. 일반적인 상태공간모형의 필터링은 식 (3.18)을 이용하는 다음과 같은 상태변수의 확률밀도함수에 대한 예측과 갱신 과정을

<sup>7</sup> 파티클필터에 대한 보다 자세한 논의는 Cappé et al. (2007), Creal (2009) 그리고 Doucet and Johansen (2011) 등을 참조할 수 있다.



으로 구성된다.

$$\begin{cases} p(\alpha_t | Y_{t-1}) = \int p(\alpha_t | \alpha_{t-1})p(\alpha_{1:t-1} | Y_{t-1})d\alpha_{1:t-1} & \cdots (p) \\ p(\alpha_t | Y_t) = \frac{p(y_t|\alpha_t)p(\alpha_t|Y_{t-1})}{p(y_t|Y_{t-1})} & \cdots (f) \end{cases} \quad (3.19)$$

파티클필터는  $t$ 기의 새로운 관측치  $y_t$ 가 관측되었을 때 식 (3.18)에서 계산이 어렵거나 불가능한  $t - 1$ 시점의 필터확률밀도함수(filtered probability density function)  $p(\alpha_{t-1} | Y_{t-1})$ 를 근사하는 이산가중표본  $\{\alpha_{t-1}^{(i)}, w_{t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ 을  $t$ 시점의 필터확률밀도함수  $p(\alpha_t | Y_t)$ 를 근사하는 이산가중표본  $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ 로 갱신하는 시뮬레이션 기반 필터링방법이다. 상태변수의 예측과 갱신과정에서 이산표본의 가중치  $\{w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ 은  $\sum_{i=1}^N w_t^{(i)} = 1$ 을 충족한다.

일반적으로 상태변수  $\{\alpha_t\}_{t=1}^n$ 의 필터확률밀도함수를 계산하거나 이로부 터 직접표본을 추출하는 것이 불가능하므로  $p(\alpha_{1:t} | Y_t)$ 의 서포트(support)를 포함하는 다음과 같은 중요확률밀도함수(importance density)를 가지는 순차 중요표본추출법(sequential importance sampling, SIS)이 이용된다.

$$q(\alpha_{1:t} | Y_t) = q(\alpha_t | \alpha_{1:t-1}, Y_t) q(\alpha_{1:t-1} | Y_{t-1}) \quad (3.20)$$

식 (3.20)을 중요확률밀도함수로 이용하는 경우 식 (3.18)의 목표확률밀도함수에 대한 중요가중치(importance weights)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w_t^{(i)} \propto \frac{p(y_t | \alpha_t^{(i)})p(\alpha_t^{(i)} | \alpha_{t-1}^{(i)})}{q(\alpha_t^{(i)} | \alpha_{1:t-1}^{(i)}, Y_t)} w_{t-1}^{(i)} \quad (3.21)$$

여기에서  $w_t^{(i)} = \frac{p(\alpha_{1:t}^{(i)}|Y_t)}{q(\alpha_{1:t}^{(i)}|Y_t)}$ 으로  $i$ 번째 표본의 중요가중치이다. 일반적으로  $p(\alpha_{1:t} |$

$Y_t$ 를 근사하는  $q(\alpha_{1:t} | Y_t)$  또한  $\{\alpha_t\}_{t=1}^n$ 가 주어졌을 때  $\{y_t\}_{t=1}^n$ 들이 서로 독립이고  $\alpha_t$ 가 마르코프 성질을 충족하도록 선택되므로 식 (3.21)의 분모에 포함된  $t$ 시점의 중요확률밀도함수  $q(\alpha_t^{(i)} | \alpha_{1:t-1}^{(i)}, Y_t)$ 는  $q(\alpha_t^{(i)} | \alpha_{t-1}^{(i)}, y_t)$ 으로 축약될 수 있다. SIS알고리즘을 이용하는 경우 시간이 경과함에 따라 하나의 가중치를 제외한 나머지 가중치들이 0이 되는 퇴화(degeneracy)가 발생하므로 이를 완화하는 방법으로 리샘플링(resampling)이 이용된다. 파티클필터의 필터확률밀도함수에 대한 근사 정도(approximation accuracy)와 효율성(efficiency)은 중요확률밀도함수와 리샘플링 방법 선택에 크게 영향을 받을 수 있다.

본 연구에서는 Pitt and Shephard (1999)에서 제안된 보조파티클필터(auxiliary particle filter)를 이용한다. 보조파티클필터에서 이용하는 중요확률밀도함수는 다음과 같다.

$$q(y_t | \alpha_{t-1}^{(i)})q(\alpha_t^{(i)} | \alpha_{t-1}^{(i)}, y_t) \equiv p(y_t | \hat{\alpha}_{t-1}^{(i)})p(\alpha_t^{(i)} | \alpha_{t-1}^{(i)}) \quad (3.22)$$

여기에서  $\hat{\alpha}_{t-1}^{(i)}$ 는  $p(\alpha_t | \alpha_{t-1}^{(i)})$ 의 평균, 최빈수, 중위수 등을 나타낸다. 식 (3.22)를 이용하는 보조파티클필터는 다음과 같이 요약될 수 있다.

[표 3.2]의 알고리즘에서는 다음과 같이 정의되는 Kong et al. (1994)의 ESS(effective sample size)가 미리 정한 기준(threshold) 보다 작아지는 경우 리샘플링을 수행한다.

$$ESS = \left( \sum_{i=1}^N (w_t^{(i)})^2 \right)^{-1} \quad (3.23)$$

추가적인 리샘플링은 몬테카를로 분산을 증가시키므로 매 시점 리샘플링을 수행하는 것은 바람직하지 않다(Carpenter et al. (1999), Pitt and Shephard (2001)). 식 (3.23)의 ESS는 1과  $N$ 사이의 값을 가진다. 일반적으로 ESS가  $0.5N$ 또는

---

**[표 3.2] 보조파티클필터(auxiliary particle filter)**


---

[Step 0] input  $\{\alpha_{t-1}^{(i)}, w_{t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$

[Step 1] compute and normalize the unnormalized weights

$$\tilde{\pi}_{t-1}^{(i)} = p(y_t | \hat{\alpha}_{t-1}^{(i)}) w_{t-1}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\pi_{t-1}^{(i)} = \tilde{\pi}_{t-1}^{(i)} / \sum_{j=1}^N \tilde{\pi}_{t-1}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, N$$

[Step 2] resample  $\{\alpha_{t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$  with the weights  $\{\pi_{t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$

[Step 3] draw  $\alpha_t^{(i)} \sim p(\alpha_t | \alpha_{t-1}^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$

[Step 4] compute and normalized the unnormalized weights

$$\tilde{w}_t^{(i)} = \frac{p(y_t | \alpha_t^{(i)})}{p(y_t | \hat{\alpha}_{t-1}^{(i)})}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$w_t^{(i)} = \tilde{w}_t^{(i)} / \sum_{j=1}^N \tilde{w}_t^{(j)}, \quad i = 1, \dots, N$$

[Step 5] compute ESS

if  $\text{ESS} < \text{Threshold}$

resample  $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$  and set  $w_t^{(i)} = 1/N$

[Step 6] output  $\{\alpha_t^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$

---

$0.75N$ 보다 작아지는 경우 리샘플링을 수행한다. [표 3.2] [step 5]에서와 같이 리샘플링을 수행하면 가중치가  $w_t^{(i)} = 1/N$ 이 된다는 점에 주의할 필요가 있다.

$t-1$ 시점의 이산가중표본과 가중치  $\{\alpha_{t-1}^{(i)}, w_{t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ 가 주어지면  $p(\alpha_t | \alpha_{t-1}^{(i)})$ 로부터  $\alpha_t^{(i)}$ 를 생성하는 방법으로 다음과 같이 로그우도(log-likelihood)를 계산할 수 있다.

$$\log p(y_t | y_{1:t-1}) = \int \log p(y_t | \alpha_t) p(\alpha_t | y_{1:t-1}) d\alpha_t \simeq \sum_{i=1}^N w_{t-1}^{(i)} \log p(y_t | \alpha_t^{(i)}) \quad (3.24)$$

여기에서  $y_t$ 와  $Y_t$ 는 각각  $t$ 시점의 관측치와 이에 대한 확률변수,  $y_{1:t-1} = \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ 이다.

### 3.5 확률코플러모형 비교 방법

코플러모형을 이용한 확률변수들간의 연관성 추론에서는 코플러 선택에 따라 포착할 수 있는 비대칭적 연관성과 꼬리 연관성이 크게 영향을 받을 수 있으므로 다양한 코플러모형에 대한 비교가 필수적이다. 본 절에서는 베이지언 접근법과 고전적 접근법에서 식 (3.2)의 확률코플러모형 비교에 이용할 수 있는 방법을 논의하기로 한다.

### 3.5.1 베이지언 모형 비교<sup>8</sup>

일반적인 베이지언 모형 비교에는 주변우도의 비로 얻어지는 베이스팩터를 이용할 수 있다. 그러나 식 (3.1)과 같은 비선형비정규 상태공간모형의 경우 베이스팩터를 추정하는 과정이 다소 복잡할 수 있다. 식 (3.2)와 같은 모형에 대한 베이지언 모형비교를 위해서는 베이스팩터를 추정하는 데 필요한 주변우도를 먼저 추정하는 것이 필요하다. 주변우도를 추정하는 다양한 방법들이 제시되었으나 본 연구에서는 Chib (1995)를 일반화한 Chib and Jeliakov (2001)의 방법으로 주변우도를 추정한다. Chib (1995)는 모형에 포함된 파라미터에 대한 전체사후조건부확률밀도함수(full conditional posterior density functions)를 알 수 있는 경우 깃스샘플링을 이용하여 얻은 사후표본을 이용하여 베이지언 가설검정과 모형비교에 필요한 주변우도를 추정하는 방법을 제시하였다. Chib and Jeliakov (2001)은 Chib (1995)를 일반화하여 파라미터 사후표본추출에 MH알고리즘이 이용되는 경우에도 사후표본을 이용하여 주변우도를 추정하는 방법을 제시하였다. 주변우도를 추정하기 위한 추가적인 알고리즘과 프로그램을 필요로 하지 않지만, Chib (1995)와 Chib and Jeliakov (2001)의 주변우도 추정 방법에는 순차적으로 축약된 사후표본추출(sequentially reduced posterior sampling)이 필요하므로 추정에 시간이 많이 소요될 수 있다.

Chib and Jeliakov (2001)은 Chib (1995)에서와 같이 다음과 같은 기초로그우도항등식(basic log-marginal likelihood identity)을 이용한다.

<sup>8</sup> Berg et al. (2004)에서 확률변동성모형비교를 위해 이용한 Spiegelhater et al. (2002)의 DIC(deviance information criterion)를 확률코풀러모형 비교에 이용하는 것은 바람직하지 않다. 왜냐하면 DIC는 상태변수의 모수설정(parameterization)에 크게 영향을 받는 경향이 있기 때문이다. 본 문에서 논의한 바와 같이 확률코풀러모형에서는 연관성 파라미터가 적절한 정의역을 가지도록 상태변수를 변환하는 변환함수가 이용되는데 각 코풀러모형들마다 이 변환함수가 상이하기 때문이다.

$$\log m(\mathbf{y}) = \log p(\mathbf{y} | \theta^*) + \log \pi(\theta^*) - \log \pi(\theta^* | \mathbf{y}) \quad (3.25)$$

여기에서  $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $m(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} | \theta) \pi(\theta) d\theta$ 이다. 식 (3.25)에서 우변의 첫 번째와 두 번째 항은 각각 항은  $\theta^*$ 에서 평가한 로그우도와 로그사전 확률밀도함수를, 그리고 세 번째 항은  $\theta^*$ 에서 평가한 로그사후확률밀도함수를 나타낸다. Chib and Jeliakov (2001)은 국지적 가역성조건(local reversibility condition)을 이용하여 MH알고리즘으로 사후표본을 생성했을 때 식 (3.25)의 우변의 세 번째 항을 계산하는 방법을 제시하였다. 주변우도 추정에 대한 보다 자세한 논의는 Chib and Jeliakov (2001)에 제시되어 있으므로 생략하기로 한다.

식 (3.1)과 같은 확률코플러모형들은 기본적으로 비내포모형(non-nested model)이므로 베이지언 모형비교를 위해 Chib and Jeliakov (2001)에서와 같은 주변우도 추정치로 구한 베이즈팩터를 이용하여야 한다. 그러나 가우시언 코플러는  $t$ 코플러의 내포모형이므로 보다 간단한 방법으로 베이즈팩터를 추정할 수 있다. Jacquier et al. (2004)는 두꺼운 꼬리를 가지는 수익률분포 확률 변동성모형 검정을 위한 베이즈팩터를 계산하는 간편한 방법을 제시하였다. 사전확률밀도함수를 식 (3.2)와 같이 설정하는 경우, Jacquier et al. (2004)의 내포모형비교 방법을 가우시언코플러와  $t$ 코플러모형 비교에 이용할 수 있다.  $t$ 코플러모형을  $M_F$ , 가우시언코플러모형을  $M_B$ 라 하면, 두 모형을 비교하는 베이즈팩터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
BF_{BF} &= \frac{\int p_B(U | \Theta) \pi_B(\Theta) d\Theta}{p(U | M_F)} = \int_{\mathbf{v}} \left( \int_{\Theta} \frac{p_B(U | \Theta) \pi_B(\Theta)}{p(U | M_F)} d\Theta \right) \pi_F(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\
&= \int_{\mathbf{v}} \int_{\Theta} \frac{p_B(U | \Theta) \pi_B(\Theta) \pi_F(\Theta, \mathbf{v} | U) \pi_F(\mathbf{v})}{p_F(U | \Theta, \mathbf{v}) \pi_F(\Theta, \mathbf{v})} d\Theta d\mathbf{v} \\
&= \int \int \frac{p_B(U | \Theta) \pi(\Theta)}{p_F(U | \Theta, \mathbf{v}) \pi(\Theta, \mathbf{v})} \pi_F(\Theta, \mathbf{v} | U) d\Theta d\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

여기에서  $U = \{u_{1t}, u_{2t}\}_{t=1}^T$ 이며,  $\pi_B(\Theta | M_B)$ 와  $\pi_F(\Theta, \mathbf{v})$ 는 각 모형의 파라미터에 대한 사전확률밀도함수를 나타낸다. 그리고  $\Theta$ 는  $t$ 분포의 자유도  $\mathbf{v}$ 를 제외한  $t$ 코플러모형  $M_F$ 에 포함된 파라미터와 시변 연관성 파라미터  $\{\rho\}_{t=1}^T$ 를 포함한다. 식 (3.26)에서 두 번째 행은  $p(U | M_F) = p_F(U | \theta, \mathbf{v}) \pi_F(\theta, \mathbf{v}) / \pi_F(\theta, \mathbf{v} | U)$ 를 이용한 것이다. 위 식을 이용하면  $BF_{BF}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$BF_{B|F} = \frac{p(U | M_B)}{p(U | M_F)} = E_{[\Theta, \mathbf{v} | U]} \left[ \frac{p_B(U | \Theta, M_B) \pi_B(\Theta | M_B)}{p_F(U | \Theta, \mathbf{v}, M_F) \pi_F(\Theta | \mathbf{v}, M_F)} \right] \tag{3.27}$$

여기에서  $E_{[\Theta, \mathbf{v} | U]}[\cdot]$ 는  $M_F$ 모형의 사후확률밀도함수  $\pi_F(\Theta, \mathbf{v} | U)$ 에 대한 기대치를 나타낸다. 그러므로 자유도에 제약이 부과되지 않은  $t$ 코플러모형의 사후확률밀도함수  $\pi_F(\Theta, \mathbf{v} | U)$ 로부터 생성한  $G$ 개의 사후표본을 이용하여 다음과 같이 베이즈팩터를 얻을 수 있다.

$$BF_{B|F} = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \left( \frac{p_B(U | \Theta^{(g)}, M_B) \pi_B(\Theta^{(g)} | M_B)}{p_F(U | \Theta^{(g)}, \mathbf{v}^{(g)}, M_F) \pi_F(\Theta^{(g)} | \mathbf{v}^{(g)}, M_F)} \right) \tag{3.28}$$

가우시언 코플러모형과  $t$ 코플러모형 비교는 매우 중요한 의미를 가지고 있다. 왜냐하면 Hafner and Manner (2012)는 Manner and Seger (2011)의 타원 분포 혼합코플러모형의 꼬리 연관성이 가지는 ‘near asymptotic dependence’ 특성을 가지는 가우시언 확률코플러모형이 연관성 파라미터가 불변인 코플러모형이 포착하는 극단적인 꼬리 연관성을 충분히 포착할 수 있음을 실증 분석을 통해 확인하였기 때문이다. 가우시언 확률코플러모형과  $t$ 확률코플러모형을 비교하였을 때  $t$ 확률코플러모형이 선택되는 것은 가우시언 확률코플러모형이 충분히 포착하지 못한 극단적인 꼬리 연관성이 여전히 남아 있음을 의미한다.

### 3.5.2 고전적 접근법의 모형 비교

고전적인 접근법에서 Rivers and Vuong (2002)에서 제시된 방법으로 확률코플러모형들을 비교하는 것이 가능하다. Rivers and Vuong (2002)는 다양한 비내포 비선형 동태모형에 대한 비교방법을 제시하였다. 특히, Rivers and Vuong (2002)의 비교방법은 귀무가설과 대립가설 하의 모형이 모두 모형설정 오류를 가지는 경우에도 적용할 수 있다는 장점을 가지고 있다.

Rivers and Vuong (2002)는 최우추정법으로 추정된 두 모형의 로그우도가 같다는 귀무가설 하에서 다음과 같이 로그우도함수 표본평균의 차가 표준정규분포를 따른다는 것을 보였다.

$$\frac{\sqrt{T} \left[ \overline{(\log L(\hat{\theta}_{1T}; M_1))} - \overline{(\log L(\hat{\theta}_{2T}; M_2))} \right]}{\hat{\sigma}_T} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (3.29)$$

여기에서  $\overline{\log L(\hat{\theta}_{iT}; M_i)} = T^{-1} \sum_{i=1}^T \log L(y_i; \hat{\theta}_{iT})$ 이며,

$\hat{\sigma}_T^2 = \text{Var} \left( \sqrt{T} \left[ \overline{(\log L(\hat{\theta}_{1T}; M_1))} - \overline{(\log L(\hat{\theta}_{2T}; M_2))} \right] \right)$ 이다.  $\hat{\sigma}_T^2$ 의 추정치로는 Newey



and West (1987, 1994)와 Andrews (1991)의 HAC(Heteroskedasticity and autocorrelation consistent) 추정치를 이용할 수 있다. River and Vuong (2002) 모형비교 방법의 장점은 파라미터 추정에 따른 불확실성을 고려하지 않고 모형비교가 가능하다는 점이다. 무정보에 가까운 사전확률밀도함수를 이용하여 확률코플러모형에 대한 베이지언 추정을 한 경우, 파라미터들의 사후표본평균을 파라미터 최우추정치로 볼 수 있다<sup>9</sup>. 따라서 보조파티클필터를 통해 얻은 로그우도를 이용하여 Rivers and Vuong (2002)에서 제시된 방법으로 확률코플러모형들을 비교할 수 있다.

Rivers and Vuong (2002)와 유사한 맥락에서 Johannes et al. (2009)는 파티클필터로 추정된 우도를 이용하여 확률변동성모형을 비교하는 방법을 제안하였다. Johannes et al. (2009)의 모형 비교 방법은 확률코플러모형에도 적용가능하다. Johannes et al. (2009)는 다음과 같은 순차우도비(sequential likelihood ratio)를 이용하여 비교 대상 모형이 관측된 자료를 충분히 설명하지 못하는 기간을 식별할 수 있다고 주장하였다.

$$LR_{i,j}(t) = \frac{L(y^t | M_i)}{L(y^t | M_j)} = \frac{p(y_t | M_i)}{p(y_t | M_j)} \times LR_{i,j}(t-1) \quad (3.30)$$

여기에서  $y^t = \{y_1, \dots, y_t\}$ 이며,  $L(y^t | M_i)$ 는 주어진 파라미터값에서 파티클필터를 이용하여 구한  $t$ 기까지의 우도함수를 나타낸다. 그러므로 순차우도비를 이용하여 각 확률코플러모형의 주어진 자료에 대한 상대적인 설명력을 비교할 수 있다.

<sup>9</sup> 무정보사전확률밀도함수를 이용한 경우에도 소표본에 대한 베이지언 추론의 경우, 파라미터들의 사후표본평균을 최우추정치로 볼 수 없다. 이를 지적해준 익명의 심사자에게 감사를 표한다. 무정보사전확률밀도함수가 아닌 사전확률밀도함수를 이용하는 경우에도 우도함수의 정보가 사전확률밀도함수를 압도하는 대표본을 이용한 베이지언 추론의 경우 파라미터들의 사후표본평균으로 얻어지는 파라미터 추정치를 최우추정치로 볼 수 있다.

#### 4. 모의실험

본 절에서는 모의실험을 통해 본 연구에서 제안하는 MCMC알고리즘으로 생성한 파라미터들의 사후표본의 특성을 살펴봄으로서 MCMC알고리즘의 성과와 정도(accuracy)를 살펴보기로 한다. 모의실험을 위한 각 확률코플러모형들의 파라미터값들을 다음과 같이 설정하였다.

$$\begin{aligned}
 \text{i) } & \textit{Gaussian} & \mu = 1.0, \phi = 0.97, \sigma_{\eta} = 0.1 & (4.1) \\
 \text{ii) } & \textit{Student-t} & \mu = 1.0, \phi = 0.97, \sigma_{\eta} = 0.1, \nu = 7.0 \\
 \text{iii) } & \textit{Clayton} & \mu = 1.0, \phi = 0.97, \sigma_{\eta} = 0.1 \\
 \text{iv) } & \textit{Frank} & \mu = 5.6, \phi = 0.97, \sigma_{\eta} = 0.5 \\
 \text{v) } & \textit{Gumbel} & \mu = 1.0, \phi = 0.97, \sigma_{\eta} = 0.1 \\
 \text{vi) } & \textit{Plackett} & \mu = 2.0, \phi = 0.98, \sigma_{\eta} = 0.13
 \end{aligned}$$

위와 같은 파라미터값 설정은 Hafner and Manner (2012)에서 실증분석한 1990년 03월 26일 2000년 03월 23일 기간의 Dow Jones 지수와 Nasdaq 지수 수익률 자료에 대한 분석결과를 고려한 것이다. Frank코플러와 Plackett코플러모형의 경우, 소표본에서 파라미터 추정치들이 다소 불안정한 특성을 보이는 경향이 있으므로  $T = 2,000$ 의 자료를 생성하였다. 나머지 코플러모형들은  $T = 1,000$  크기 자료를 생성하여 모의실험을 수행하였다. 식 (4.1)과 같은 파라미터 설정하에 자료를 생성한 다음 본 연구의 MCMC알고리즘으로 파라미터들의 사후표본을 추출하는 모의실험을 1,000회 수행하였다. 모의실험에서 다음과 같이 파라미터들의 사전확률밀도함수를 설정하였다.

$$\begin{cases} \pi(\mu) = N(0, 10^4) \\ \pi(\phi) = TN_{(-1,1)}(0, 10^2) \\ \pi(\sigma_\eta^2) = IG(2.5, 0.025), (\pi(\sigma_\eta^2) = IG(2.5, 0.25)) \\ (\pi(v) = G(5, 0.5) I(v > 2)) \end{cases} \quad (4.2)$$

식 (4.2)의 사전확률밀도함수에서  $\sigma_\eta^2$ 과  $v$ 를 제외한 다른 파라미터들의 사전확률밀도함수는 실질적으로 무정보에 가깝다.  $\sigma_\eta^2$ 의 사전확률밀도함수에서 Frank코플러와, Plackett코플러의 경우에는  $\pi(\sigma_\eta^2) = IG(2.5, 0.025)$ 의 사전확률밀도함수를, 그 외 모형들의 경우에는  $\pi(\sigma_\eta^2) = IG(2.5, 0.25)$ 의 사전확률밀도함수를 설정하였다.  $v$ 의 경우에는 식별이 용이할 수 있도록 평균이 10이고 분산이 20인 감마분포로 설정하였다. 모의실험에서 사후표본의 충분한 수렴 위해 총 10만개의 사후표본을 생성한 후 초기 5만개를 제외한 나머지 5만개의 표본에서 10개마다 하나씩 선택하여 얻어지는 5천개를 사후추론에 이용하였다. 이와 같은 방법으로 얻어진 천개의 사후평균(posterior mean)에 대한 요약 통계량은 [표 4.1]과 [그림 4.1]에 수록되어 있다. [표 4.1]에서 4열~8열은 각각 1,000회의 생성자료를 분석하여 얻은 확률코플러모형 파라미터들의 사후평균의 평균(mean), 표준편차(standard deviation), 95% HPD구간(highest probability density interval), RMSE(root mean squared error), MAPE(mean absolute percentage error)를 수록한 것이다. 그리고 [그림 4.1]은 각 확률코플러모형들의 파라미터 사후평균의 히스토그램과 함께 커널확률밀도함수(empirical kernel density)를 도시한 것이다. 각 패널에서 수직선과 그림 위의 수치는 참파라미터 값을 나타낸다. [표 4.1]과 [그림 4.1]에 수록된 모의실험 결과는 소표본임에도 불구하고 전반적으로 본 연구에서 제시한 MCMC알고리즘이 효과적으로 각

확률코플러모형을 추정하고 있음을 보여준다. [표 4.1]과 [그림 4.1]에서  $t$ 확률코플러모형<sup>10</sup>의 자유도  $\nu$ 의 경우, 전반적으로 약한 과다추정의 경향을 보이고 있다. 이는 분석자료의 크기가  $T = 1,000$ 으로 작은 것에 기인한 것으로 판단된다.

---

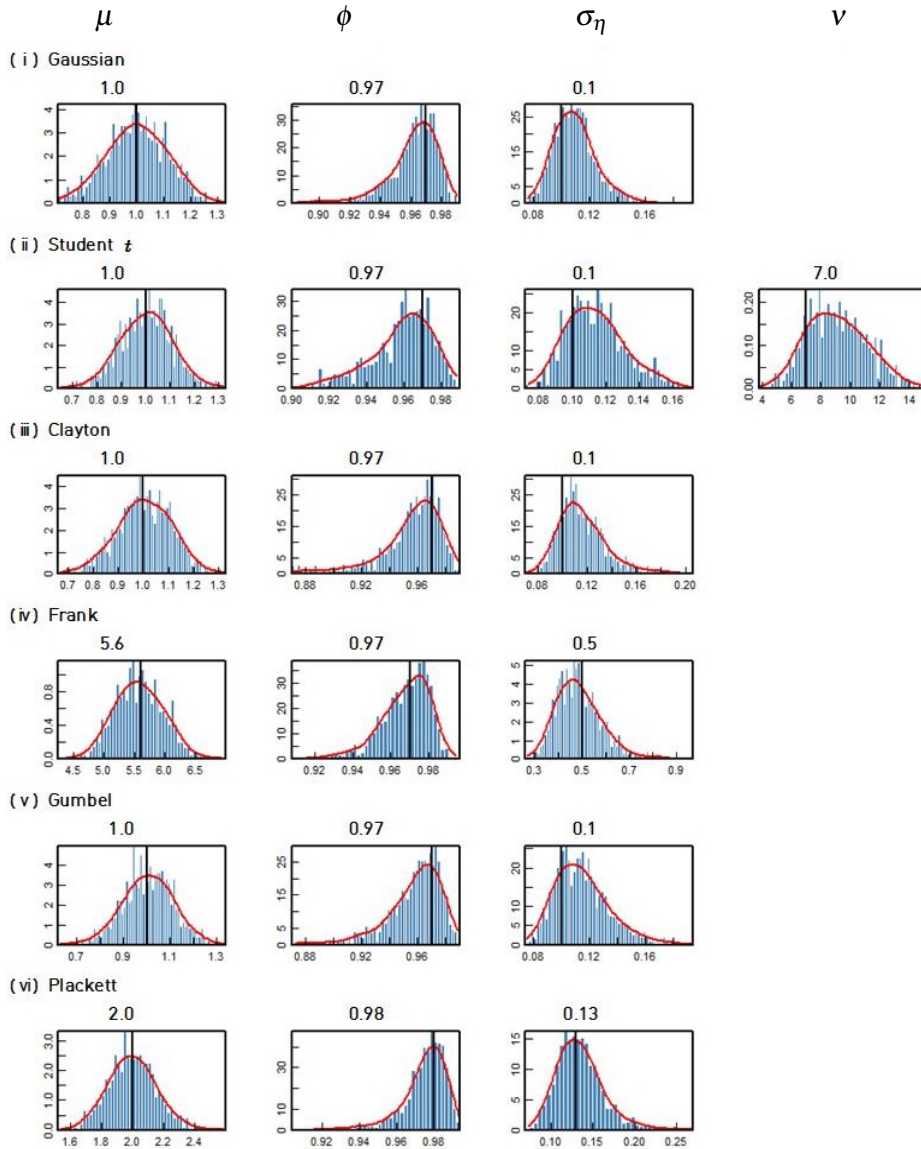
<sup>10</sup> 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론에는 다른 확률코플러모형보다 많은 시간이 소요되는 단점이 있다.  $T = 2,000$ 의 자료에 대한 사후표본추출에서 다른 모형들의 경우, 인텔 i7-4790 CPU와 32G 메모리를 장착한 데스크탑 컴퓨터에서 10만개의 사후표본추출에 약 7~10분 정도 소요되었으나,  $t$ 확률코플러모형의 경우에는 동일한 크기의 사후표본추출에 약 50~70분정도 소요되었다. 참고로 본 연구의 베이지언 추론 프로그램은 C언어로 작성된 것이다.

[표 4.1] 모의실험 결과

Copula	파라미터	참파라미터	평균	표준편차	HPD95	RMSE	MAPE
Gaussian	$\mu$	1.0	1.0004	0.1104	(0.7847, 1.2072)	0.1103	8.8833
	$\phi$	0.97	0.9619	0.0159	(0.9297, 0.9852)	0.0178	1.2772
	$\sigma_\eta$	0.1	0.1093	0.0150	(0.0849, 0.1435)	0.0177	13.3969
Student-t	$\mu$	1.0	1.0006	0.1058	(0.7923, 1.2034)	0.1057	8.4421
	$\phi$	0.97	0.9587	0.0166	(0.9230, 0.9852)	0.0200	1.5192
	$\sigma_\eta$	0.1	0.1138	0.0175	(0.0852, 0.1512)	0.0223	17.2350
	$\nu$	7.0	9.10	2.05	(5.46, 13.18)	2.9283	33.3976
Clayton	$\mu$	1.0	1.0043	0.1091	(0.7630, 1.1849)	0.1091	8.7522
	$\phi$	0.97	0.9557	0.0218	(0.9061, 0.9855)	0.0261	1.8147
	$\sigma_\eta$	0.1	0.1164	0.0198	(0.0837, 0.1585)	0.0257	19.0415
Frank	$\mu$	5.6	5.5779	0.4030	(4.8229, 6.3244)	0.4034	5.8037
	$\phi$	0.97	0.9673	0.0130	(0.9401, 0.9889)	0.0133	1.0360
	$\sigma_\eta$	0.5	0.4878	0.0974	(0.3233, 0.6888)	0.0981	15.5061
Gumbel	$\mu$	1.0	1.0051	0.1079	(0.8112, 1.2348)	0.1079	8.6303
	$\phi$	0.97	0.9576	0.0195	(0.9188, 0.9877)	0.0231	1.6504
	$\sigma_\eta$	0.1	0.1145	0.0193	(0.0818, 0.1546)	0.0241	18.0690
Plackett	$\mu$	2.0	1.9970	0.1527	(1.6838, 2.2806)	0.1527	6.0818
	$\phi$	0.98	0.9750	0.0120	(0.9514, 0.9926)	0.0130	0.8990
	$\sigma_\eta$	0.13	0.1350	0.0277	(0.0829, 0.1866)	0.0282	16.2809

주) 표에서 4열~8열은 각각 1,000회의 생성자료를 분석하여 얻은 확률코폴리모형 파라미터들의 사후평균의 평균(mean), 표준편차(standard deviation), 95%HPD구간(highest posterior density interval), RMSE(root mean squared error), MAPE(mean absolute percentage error)를 수록한 것이다.

[그림 4.1] 모의실험 결과 요약



주) 그림은 각 확률코플러모형들의 파라미터 사후평균의 히스토그램과 함께 커널 확률밀도함수(empirical kernel density)를 도시한 것이다. 각 패널에서 수직선과 그림위의 수치는 참파라미터값을 나타낸다.

### 5. 실증분석

본 장에서는 본 연구의 MCMC알고리즘을 이용한 실증분석 결과를 살펴보기로 한다. 분석자료는 2003년 01월 03일 2014년 12월 30일 기간의 KOSPI지수와 HSCE지수 로그차분 수익률  $r_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1})$  일간자료를 이용하였다. 지수 수익률들의 연관성 포착을 위해 두 지수의 시장이 모두 개장된 거래일의 종가자료를 이용하였다. 자료의 크기는  $T = 2,846$ 이다. 지수 수익률 요약통계량을 [표 5.1]에 수록하였다. [표 5.1]에서 JB는 자유도2의 Jarque-Bera 정규성검정통계량을 그리고, LB(10)과 ML(10)은 각각 자유도 10의 Ljung-Box 통계량과 McLeod-Li통계량을 나타낸다. 각 통계량 아래 ( )안의 수치는 p값(p-values)이다. [표 5.1]을 보면 KOSPI지수 수익률은 뚜렷한 왜도와 초과첨도, 변동성집중의 전형적인 특성을 보이고 있다. 이와 달리 HSCE지수 수익률은 초과첨도와 변동성집중의 전형적인 특성을 보이지만 왜도는 크지 않다. 이러한 특성들은 Jarque-Bera검정통계량이 유의한 것으로 나타나고 있다. HSCE지수 수익률의 경우, 자유도 10의 Ljung-Box통계량이 유의하므로 수익률에 계열상관이 존재하는 것으로 볼 수 있다.

[표 5.1] 지수 수익률 요약 통계량 (2003년 01월 03일 2014년 12월 30일)

	평균	표준편차	최대값	최소값	왜도 (skewness)	첨도 (kurtosis)	JB	LB(10)	ML(10)
<b>KOSPI</b>	0.0388	1.4389	-11.1720	11.2844	-0.4815	6.1037	4537.25 (0.0000)	14.4197 (0.1547)	1650.97 (0.0000)
<b>HSCF</b>	0.0624	2.0912	-15.0873	15.6056	-0.0635	6.7748	5455.71 (0.0000)	40.1543 (0.0000)	2124.03 (0.0000)

주) [표]에서 JB는 자유도2의 Jarque-Bera정규성검정통계량을 그리고 LB(10)과 ML(10)은 자유도 10의 Ljung-Box통계량과 McLeod-Li통계량을 나타낸다. 각 통계량 아래 ( )안의 수치는 p값(p-values)이다.

2단계 추정으로 확률코플러모형을 추정하기 위해 먼저 개별 수익률에 대

하여 다음과 같은 로그확률변동성모형을 추정하였다.

$$\begin{cases} r_t = \mu_t + \exp\left(\frac{1}{2}h_t\right) \sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, 1) \quad t = 1, \dots, T \\ h_{t+1} = \mu_h + \phi_h(h_t - \mu) + \sigma_h \eta_t, \eta_t \sim N(0, 1) \quad t = 1, \dots, T \\ h_1 \sim N\left(\mu_h, \frac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right) \\ \lambda_t \sim IG(v/2, v/2), \quad t = 1, \dots, T \\ \text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) = \rho \end{cases} \quad (5.1)$$

여기에서  $\{h_t\}$ 는 로그조건부분산이며,  $\lambda_t$ 는 두꺼운 꼬리를 가지는  $t$ 분포를 따르는 조건부 수익률분포를 포착하기 위해 도입된 것이다. 식 (5.1)에서  $\mu_h$ 는 로그조건부분산의 장기평균을,  $\phi_h$ 는 지속성을,  $\sigma_h$ 는 로그조건부분산의 변동성을, 그리고  $\rho$ 는 레버리지효과(leverage effect)를 포착하는 파라미터이다. 식 (5.1) 모형에 대한 베이지언 추론을 위해 다음과 같은 사전확률밀도함수를 설정하였다.

$$\begin{cases} \pi(\mu_r) = N(0, 10^2) \\ \pi(\mu) = N(0, 10^2), \pi(\phi) = TN_{(-1,1)}(0, 10^2), \pi(v) = G(5, 0.5)I(2, \infty) \\ \pi(\psi | \omega^2) = N(0, \frac{1}{2}\omega^2), \pi(\omega^2) = IG(2.5, 0.025) \end{cases} \quad (5.2)$$

식 (5.2)의 사전확률밀도함수에서  $\{\psi, \omega^2\}$ 는 제약이 부과된  $(\varepsilon_t, \sigma_h \eta_t)'$ 의 공분산행렬에 포함된  $\{\rho, \sigma_h^2\}$ 을 표본추출하기 위해 보조적으로 도입한 파라미터이다. Jacquier et al. (2004)는 제약하의 공분산행렬에 포함된  $\{\rho, \sigma_h^2\}$ 을 표본추출하기 위하여  $\sigma_h \eta_t = \psi \varepsilon_t + \omega e_t$ ,  $e_t \sim N(0, 1)$ 의 회귀식을 이용하는 방법을 제시하였다. 이 회귀식에서  $\psi = \rho \sigma_h$ ,  $\omega^2 = (1 - \rho^2) \sigma_h^2$ 인데, 이들 파라미터의



사전확률밀도함수를  $\pi(\psi, \omega^2) = \pi(\psi | \omega^2)\pi(\omega^2)$ 와 같이 쓸 수 있다.  $\{\psi, \omega^2\}$ 을 사후표본추출할 수 있다면,  $\rho = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + \omega^2}}$ ,  $\sigma_\eta^2 = \psi^2 + \omega^2$ 의 일대일 대응관계를 이용하여  $\{\rho, \sigma_h^2\}$ 의 사후표본을 생성할 수 있다.

3장에서 제시된 확률코플러모형의 미관측 상태변수에 대한 사후표본추출 방법을 식 (5.1)의 확률변동성모형에 준용할 수 있다. 그리고 미관측 상태변수가 주어졌을 때, 확률변동성모형의 파라미터에 대한 사후표본추출은 비교적 간단하다. 식 (5.2)의 사전확률밀도함수를 이용하여, 식 (5.1)의 확률변동성모형을 추정하였다. HSCE지수 수익률의 경우, 계열상관이 유의하므로 사전분석을 통해 AR(1)필터를 이용하여 계열상관을 제거한 자료를 분석하였다. 식 (5.1)의 모형에 대한 베이지언 추론에는 총 25만개의 사후표본을 생성한 후, 초기 5만개의 표본을 제외한 나머지 20만개의 표본에서 10개마다 하나씩 취해 얻어지는 2만개의 사후표본을 이용하였다.

각 모형의 파라미터들에 대한 추정 결과를 [표 5.2]와 [그림 5.1]에 수록하였다. [표 5.2]의 2열과 3열의 각 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 2행 ( )안의 수치는 표준편차, 3행 [ , ]안의 수치는 95% HPD구간, 4행 < >안의 수치는 사후표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량(Geweke's convergence diagnostic, CD)을 나타낸다. 수렴진단통계량 CD는 표준정규분포를 따른다. [그림 5.1]의 (A)패널과 (B)패널은 각각 KOSPI지수와 HSCE지수 수익률에 대한 확률변동성모형 파라미터들의 사후표본에 대한 요약 그래프들을 도시한 것이다. 각 패널에서 1열 4열은 각각 사후표본의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관플롯(autocorrelation plot), 히스토그램과 커널확률밀도함수(empirical kernel density), 사후표본의 수렴 여부를 판단할 수 있는 Bauwens and Lubrano (1998)의 CUSUM플롯을 도시한 것이다. 트레이스플롯에서 굵은 실선은 사후표본의 궤적을 적합한 LOESS추

정치이다.

[표 5.2]의 CD와 [그림 5.1]의 트레이스플롯, 자기상관플롯, CUSUM플롯은 전반적으로 사후표본의 수렴에 문제가 없음을 보여주고 있다. [표 5.2]에 수록된 추정결과는 KOSPI지수 수익률의 레버리지효과가 HSCE지수 수익률의 그것보다 더 클 뿐만 아니라 조건부수익률 분포의 꼬리 또한 더 두꺼운 것을 보여주고 있다. [표 5.2]의 추정결과는 주가지수 수익률 확률변동성모형 추정치들이 보여주는 전형적인 특징을 보여주고 있다.

[표 5.2] 확률변동성모형에 대한 베이지언 추론 결과

	KOSPI	HSCE
	0.0562	0.0688
	(0.0191)	(0.0276)
$\mu_r$	[0.0190, 0.0937]	[0.0160, 0.1237]
	< 1.5170 >	< 1.1064 >
	0.0970	0.8251
	(0.1870)	(0.2675)
$\mu_h$	[-0.2759, 0.4645]	[0.3132, 1.3110]
	< 0.2586 >	< -0.057 >
	0.9820	0.9882
	(0.0047)	(0.0039)
$\phi_h$	[0.9727, 0.9910]	[0.9804, 0.9956]
	< 0.9155 >	< 2.6038 >
	0.0288	0.0192
	(0.0062)	(0.0045)
$\sigma_h^2$	[0.0167, 0.0411]	[0.0110, 0.0282]
	< -0.251 >	< -3.0396 >
	-0.6149	-0.3026
	(0.0548)	(0.0815)
$\rho$	[-0.7194, -0.5084]	[-0.4627, -0.1454]
	< 1.3971 >	< 1.5315 >
	13.220	15.4297
	(2.6697)	(3.4033)
$\nu$	[8.5111, 18.5995]	[9.7741, 22.4937]
	< -0.0736 >	< -0.4633 >

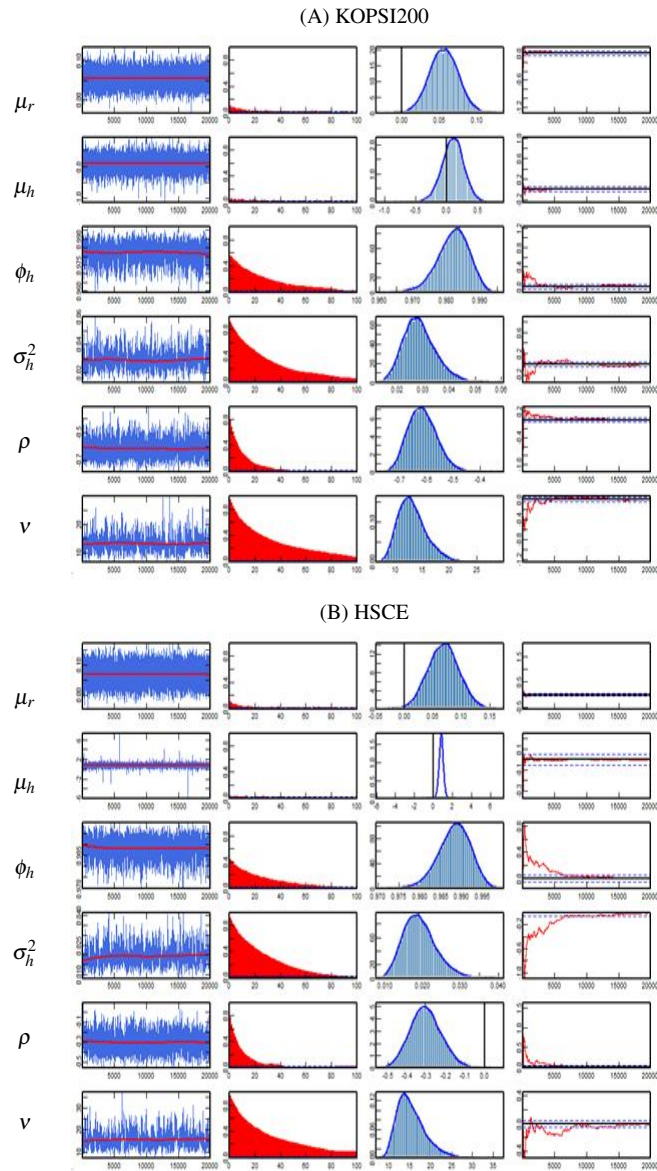
주) 표의 2열과 3열의 각 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 2행 ( )안의 수치는 표준편차, 3행 [ , ]안의 수치는 95% HPD구간, 4행 < >안의 수치는 사후표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량(Geweke's convergence diagnostic, CD)을 나타낸다. 수렴진단통계량 CD는 표준정규분포를 따른다.

[표 5.3] 확률변동성모형에 대한 Hong-Li (2005) 검정 결과

	시차(p)	M(1,1)	M(2,2)	M(3,3)	M(4,4)	M(1,2)	M(2,1)	W(p)	Q(p)
KOSPI	20	0.7716	1.0998	1.5722	2.0010	0.8308	1.6381	18.4460	4.2245
	25	0.9231	1.0901	1.4579	1.8004	0.7983	1.7130	20.4240	3.6410
	30	1.0006	1.0303	1.3217	1.6058	0.7439	1.7066	20.8260	1.7489
	35	1.1353	1.0052	1.2250	1.4602	0.7532	1.7373	22.6260	3.0205
	40	1.3608	1.0346	1.1796	1.3656	0.8501	1.8280	23.9220	3.7940
HSCE	20	0.5195	0.1161	0.0381	-0.0392	0.4284	0.6283	-1.7385	-1.5920
	25	0.7168	0.1776	0.0526	-0.0414	0.4776	0.7855	-2.5205	-0.7905
	30	0.8462	0.2046	0.0608	-0.0356	0.4941	0.8697	-2.9586	-1.5232
	35	0.9552	0.2163	0.0683	-0.0215	0.5016	0.9232	-3.0747	-0.8946
	40	1.1233	0.2387	0.0790	-0.0074	0.5442	1.0005	-3.2207	0.4273

주) Hong-Li검정 통계량은 모두 점근적으로 표준정규분포를 따르며, 회색으로 표시된 부분은 5% 유의수준에서 유의함을 나타낸다.

[그림 5.1] 확률변동성모형 파라미터들의 사후표본 요약



주) 각 패널의 1열~4열은 각각 사후표본의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관플롯(autocorrelation plot), 히스토그램과 커널확률밀도함수(empirical kernel density), 사후표본의 수렴여부를 판단할 수 있는 Bauwens and Lubrano (1998)의 CUSUM플롯을 도시한 것이다. 트레이스플롯에서 굵은 실선은 사후표본의 궤적을 적합한 LOESS추정치이다.

Carpenter et al. (1996)의 체계적 리샘플링(systematic resampling)을 이용하는 Pitt and Shephard (1999, 2001)의 보조파티클필터(auxiliary particle filter)로 추정된 확률변동성모형의 PIT의 일량성과 독립성을 검정하는 Hong and Li (2005) 검정결과를 [표 5.3]에 수록하였다. PIT를 추정하기 위해 10만개의 파티클을 이용하였다. 모형설정 오류가 없다는 귀무가설 하에 파티클필터로 추정한 PIT는 독립적이고 동일한 표준일량분포(independent and identically distributed standard uniform distribution)  $i.i.d.U[0, 1]$ 을 따른다(Rosenblatt (1952)). Hong and Li (2005) 검정은 모형추정에 따른 불확실성에 영향을 받지 않는 장점이 있지만 비모수검정이므로 밴드폭(band width)에 해당하는 시차(lag)를 선택하여야 한다. [표 5.3]에서  $Q(p)$ 와  $W(p)$ <sup>11</sup>는 전반적인 모형설정 오류를 검정하는 옴니버스 통계량을 나타낸다.  $M(1, 1), M(2, 2), M(3, 3), M(4, 4)$ 는 각각 수준, 변동성, 왜도, 첨도의 자기상관(autocorrelation)을 검정하는 통계량으로, 그리고  $M(1, 2), M(2, 1)$ 은 각각 ‘arch-in-mean’과 ‘leverage effect’를 검정하는 통계량으로 해석할 수 있다. Hong-Li검정통계량들은 모두 점근적으로 표준정규분포를 따른다. 시차 선택에 따른 검정의 민감도와 검정의 안정성을 살펴보기 위해 [표 5.3]에 20, 25, 30, 35, 40의 시차 선택에 따른 통계량들을 모두 제시하였다. [표 5.3]에서 회색으로 표시된 부분은 5% 유의수준에서 유의함을 나타낸다. [표 5.3]의 검정결과는 HSCE지수 수익률 확률변동성모형에 모형설정 오류가 없다는 것을 보여주고 있다. 이와 달리 KOSPI지수 수익률의 경우,  $M(4, 4)$ 와  $M(2, 1)$ 이 5% 유의수준에서 유의하므로 조건부 4차적률 동학과 레버리지효과 측면에서 모형설정 오류가 있음을 보여주고 있다. 이에 따라 전반적인 모형설정 오류 여부를 검정하는  $Q(p)$ 와  $W(p)$ 가 5% 유의수준에서 모두 유의한 것으로 나타나고 있다. 지면 제약으로 수록하지 않지만 포

<sup>11</sup> 표준정규분포를 따르는  $W(p)$ 통계량은  $W(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=1}^p Q(j)$ 이다.

아송점프를 포함하는 모형으로 확장하는 경우에도 결과는 달라지지 않았다. 그러므로 [표 5.2]에 제시된 추정치를 이용하여 보조파티클필터로 추정한 PIT를 확률코플러모형 추정을 위한 관측치로 이용하기로 한다.

확률변동성모형추정으로부터 얻은 PIT를 관측치로 보고 식 (3.1)의 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론을 하였다. 주가지수 수익률들의 연관성을 분석하므로 [표 2.1]에 수록된 코플러모형들 가운데 Gumbel은 180도 회전한 회전Gumbel코플러모형을 분석하였다. 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론을 위한 사전확률밀도함수는 식 (4.2)와 동일하게 설정하였다. 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론에는 총 25만개의 사후표본을 생성한 후, 초기 5만개의 표본을 제외한 나머지 20만개의 표본에서 10개마다 하나씩 취해 얻어지는 2만개의 사후표본을 이용하였다.

[표 5.2]와 [그림 5.1] 그리고 [그림 5.2]에 각 모형의 파라미터들에 대한 추정 결과가 수록되어 있다. [표 5.4]의 2열 7열에 수록된 확률코플러모형의 각 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 2행 ( )안의 수치는 표준편차, 3행 [ , ]안의 수치는 95% HPD구간, 4행 < >안의 수치는 사후표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량(Geweke's convergence diagnostic, CD)을 나타낸다. 수렴진단통계량 CD는 표준정규분포를 따른다. 6행의 log-likelihood는 각 모형 파라미터의 사후평균을 파라미터 추정치로 보고 보조파티클필터로 추정한 로그우도를 나타낸다. 보조파티클필터링에서 이용한 파티클의 수는 10만개이다. 7행 3열의 log(BF)는 가우시언코플러와 t코플러모형을 비교하는 로그베이즈팩터로, ( , )안의 수치는 95% 신뢰구간을 나타낸다. 8행은 Chib and Zeliakov (2001)의 방법으로 추정한 로그주변우도를 나타내며, ( )안의 수치는 델타법(delta method)으로 구한 표준오차를 나타낸다. [그림 5.2]의 ( i ) (vi)패널에는 각 확률코플러모형 파라미터들의

사후표본에 대한 요약 그래프들을 도시한 것이다. 각 패널에서 1열 4열은 각각 사후표본의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관플롯(autocorrelation plot), 히스토그램과 커널확률밀도함수(empirical kernel density), 사후표본의 수렴 여부를 판단할 수 있는 Bauwens and Lubrano (1998)의 CUSUM플롯을 도시한 것이다. 트레이스플롯에서 굵은 실선은 사후표본의 궤적을 적합한 LOESS추정치이다. [그림 5.2]는 각 확률코플러모형 연관성 파라미터들의 사후평균과 95% HPD구간을 도시한 것이다. [표 5.4]의 CD와 [그림 5.2]의 트레이스플롯, 자기상관플롯, CUSUM플롯을 보면, 사후표본의 수렴에 문제가 없음을 알 수 있다.

[표 5.4]의 파라미터추정결과에서 각 모형들의 연관성 파라미터들이 강한 지속성을 가짐을 알 수 있다. [표 5.4]의 3열에 수록된 가우시언코플러모형을 내포모형으로 포함하는  $t$ 코플러모형의 자유도의 사후평균이 약 15.2로 약하지만 두꺼운 꼬리를 가지는 특성이 있는 것으로 추정되었다. 이는 ‘near asymptotic dependence’ 성질을 가지는 확률 연관성 파라미터로 포착할 수 없는 꼬리 연관성이 존재함을 의미한다.

[표 5.4] 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론 결과

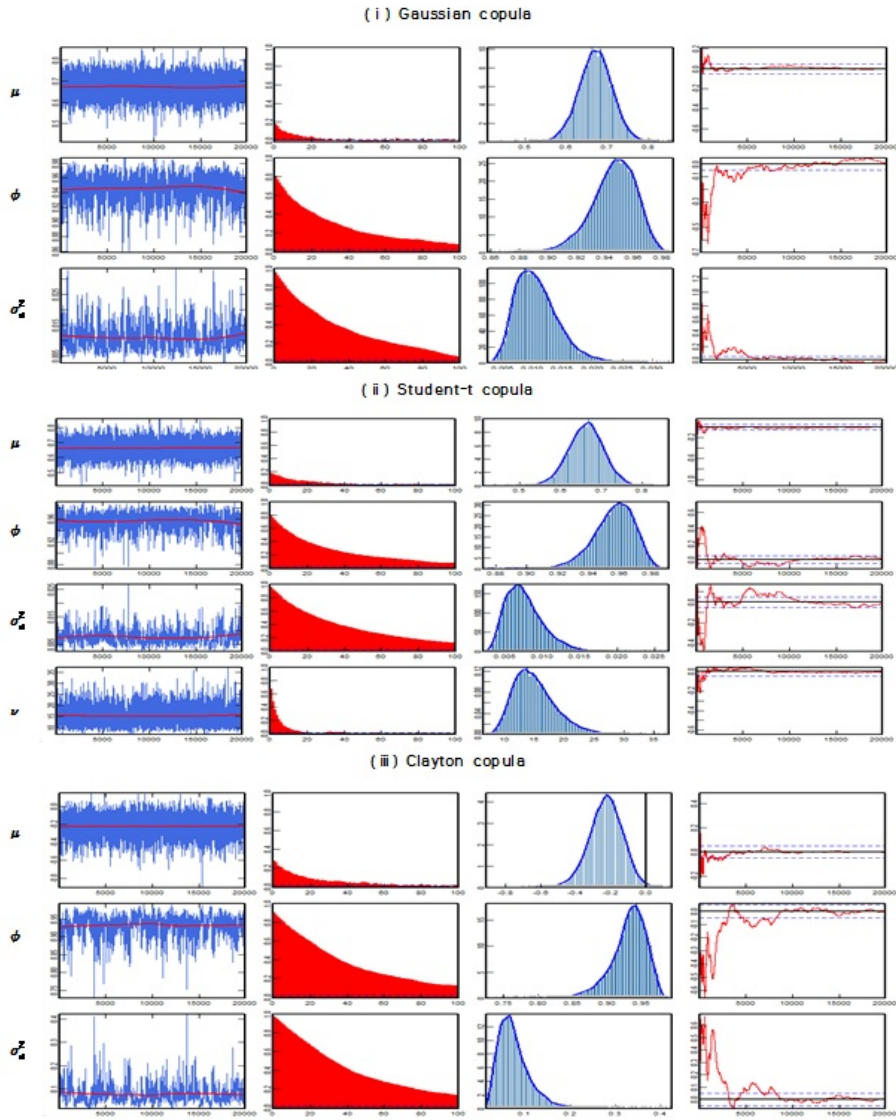
	Gaussian	Student-t	Clayton	Frank	Rotated Gumbel	Plackett
$\mu$	0.6716	0.6619	-0.2266	4.1662	-0.6820	1.8129
	(0.0512)	(0.0442)	(0.0982)	(0.3646)	(0.1343)	(0.0969)
	[0.5878, 0.7519]	[0.5770, 0.7508]	[-0.4195, -0.0338]	[3.4585, 4.8851]	[-0.9400, -0.4464]	[1.6159, 2.0004]
$\phi$	< 0.4844 >	< -1.0303 >	< -1.1618 >	< 0.7757 >	< -0.6561 >	< 1.2965 >
	0.9460	0.9564	0.9319	0.9717	0.9693	0.9453
	(0.0445)	(0.0135)	(0.0271)	(0.0134)	(0.0134)	(0.0176)
$\sigma_{\eta}^2$	[0.9139, 0.9751]	[0.9302, 0.9810]	[0.8774, 0.9766]	[0.9456, 0.9939]	[0.9432, 0.9933]	[0.9099, 0.9756]
	< -0.5947 >	< 0.1085 >	< -0.6284 >	< 0.0105 >	< -0.5448 >	< -0.5331 >
	0.0109	0.0076	0.0778	0.1849	0.0271	0.0512
$v$	(0.0234)	(0.0026)	(0.0384)	(0.1034)	(0.0134)	(0.0175)
	[0.0044, 0.0183]	[0.0034, 0.0129]	[0.0196, 0.1489]	[0.0411, 0.3787]	[0.0053, 0.0529]	[0.0221, 0.0868]
	< 0.6030 >	< 0.0513 >	< 0.7545 >	< 0.0727 >	< 0.7621 >	< 0.5383 >
		15.1723				
		(3.6093)				
		[9.1904, 22.5849]				
		< 0.1133 >				
log-likelihood	574.4153	578.2797	474.966	530.2226	544.2508	547.6925
log(BF)		-2.0853				
		(-2.3280, -1.8909)				
log-marginal likelihood	562.0455	564.5658	461.1830	519.8996	532.1636	535.4776
	(0.0511)	(0.8033)	(0.0364)	(0.80257)	(0.0473)	(0.0327)

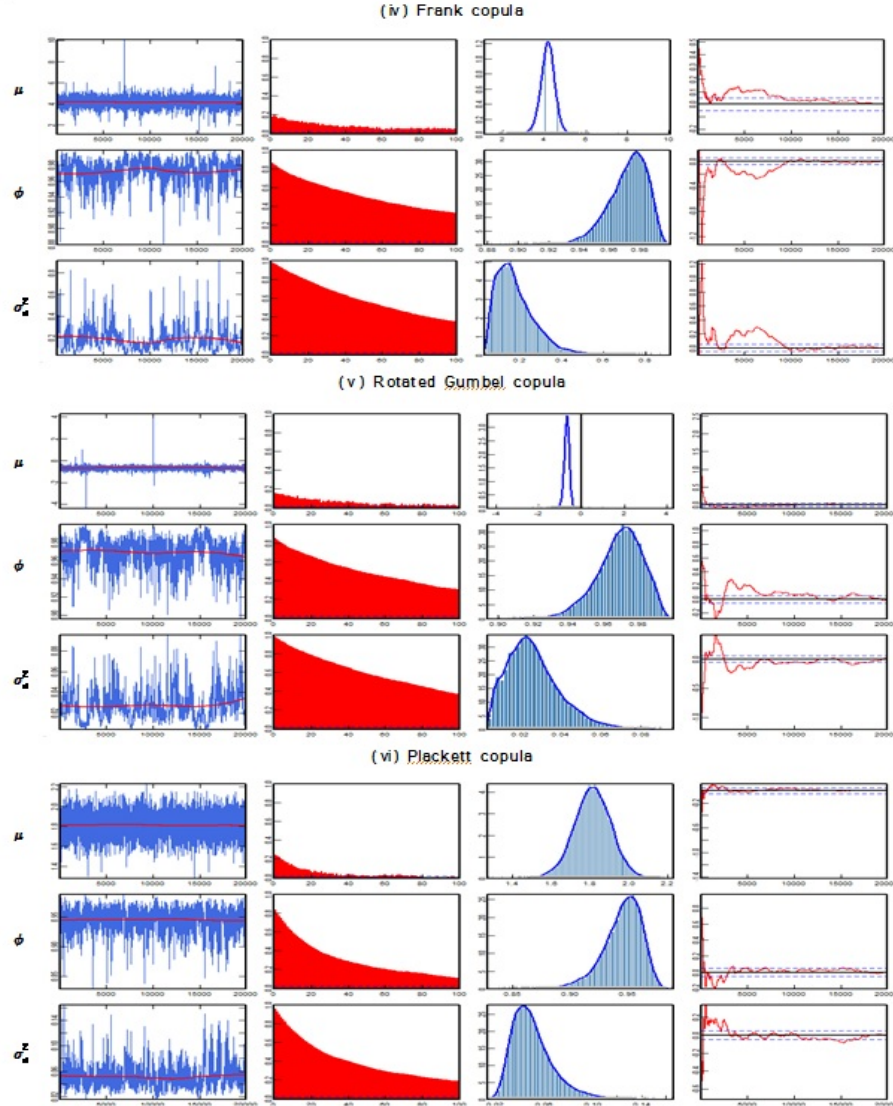
확률코플러모형에 대한 베이지언 추론

주) 각모형의 파라미터 블록에서 1행은 사후평균, 2행 ( )안의 수치는 표준편차, 3행 [ ]안의 수치는 95% HPD구간, 4행 < >안의 수치는 사후표본의 전반부 10% 표본과 후반부 50% 표본을 비교하는 Geweke (1992)의 수렴진단통계량(Geweke's convergence diagnostic, CD)을 나타낸다. 수렴진단통계량 CD는 표준정규분포를 따른다. 6행의 log-likelihood는 각 모형 파라미터의 사후평균을 파라미터 추정치로 보고 보조파티클필터로 추정된 로그우도를 나타낸다. 보조파티클필터의 파티클의 수는 10만개이다. 7행 3열의 log(BF)는 가우시언코플러와 t코플러모형을 비교하는 로그베이즈팩터로, ( )안의 수치는 95% 신뢰구간을 나타낸다. 8행은 Chib and Zeliakov (2001)의 방법으로 추정된 로그주변우도를 나타내며, ( )안의 수치는 델타법(delta method)으로 구한 표준오차를 나타낸다.



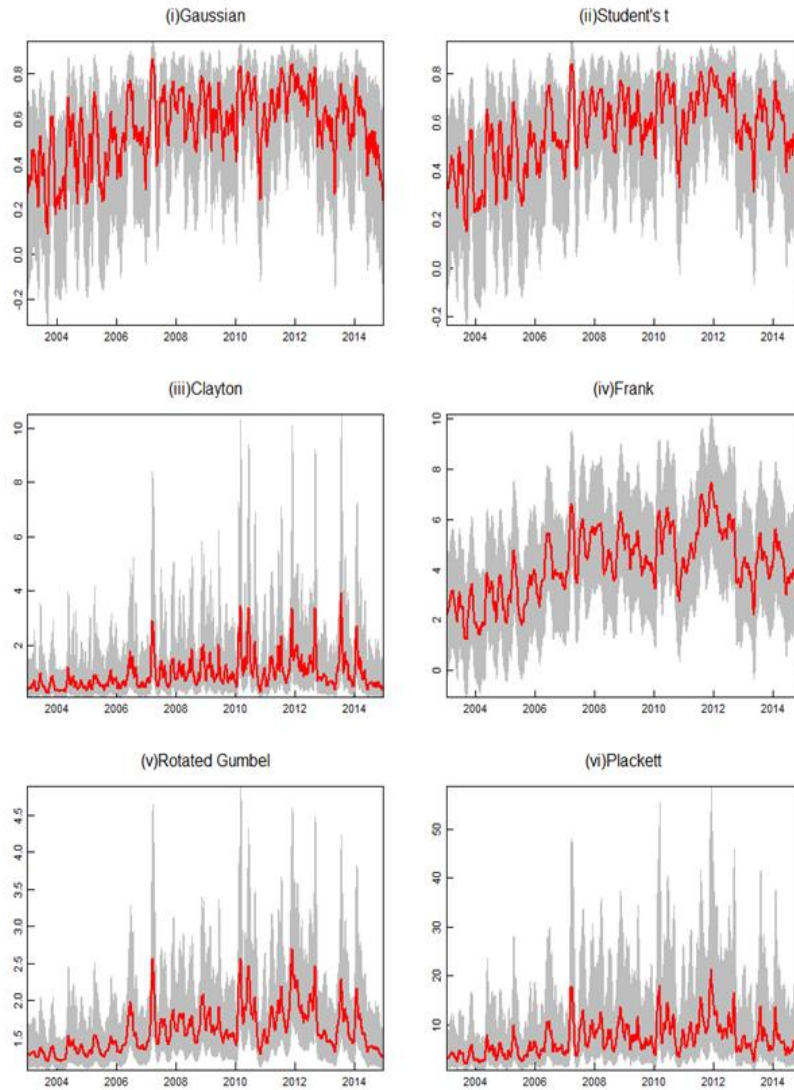
[그림 5.2] 확률코플러모형의 연관성 파라미터 사후표본 요약





주) 각 패널의 1열~4열은 각각 사후표본의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관 플롯(autocorrelation plot), 히스토그램과 커널확률밀도함수(empirical kernel density), 사후표본의 수렴여부를 판단할 수 있는 Bauwens and Lubrano (1998)의 CUSUM플롯을 도시한 것이다. 트레이스플롯에서 굵은 실선은 사후표본의 궤적을 적합한 LOESS추정치이다.

[그림 5.3] 확률코플러모형의 연관성 파라미터 사후표본 요약



주) 그림은 확률코플러모형의 연관성 파라미터의 사후평균과 95%HPD구간을 도시한 것이다. 그림에서 실선은 사후평균을, 회색으로 표시된 부분은 95%HPD구간을 나타낸다.

확률코플러모형이 포착할 수 있는 비선형 및 꼬리 연관성이 코플러함수 선택에 영향을 받을 수 있으므로 서로 다른 확률코플러모형을 비교하는 것이 필요하다. 먼저 [표 5.4]의 5행에 수록된 로그우도를 보면,  $t$ 코플러모형의 로그우도가 가장 큰 것으로 추정되었다. 로그우도를 기준으로 보면,  $t$ 코플러, 가우시언코플러, Plackett코플러, 회전Gumbel코플러, Frank코플러, Clayton코플러의 순으로 확률코플러모형들의 적합성이 좋은 것으로 나타나고 있다. 특히 [표 5.4]의 6행에 수록된 가우시언코플러와  $t$ 코플러모형을 비교하는 로그베이즈팩터는 약 -2.1로 추정되었다. Kass and Raftery (1995)에 따르면  $2\ln BF_{BF}$ 이 2~6, 6~10 그리고 10보다 큰 경우, 각각 'positive', 'strong', 'very strong' 한 것으로 해석할 수 있다. 따라서 가우시언코플러와  $t$ 코플러를 비교하는 약 -2.1의 로그베이즈팩터는  $t$ 코플러모형이 더 좋은 모형이라는 약한(positive) 증거를 보여주고 있다.

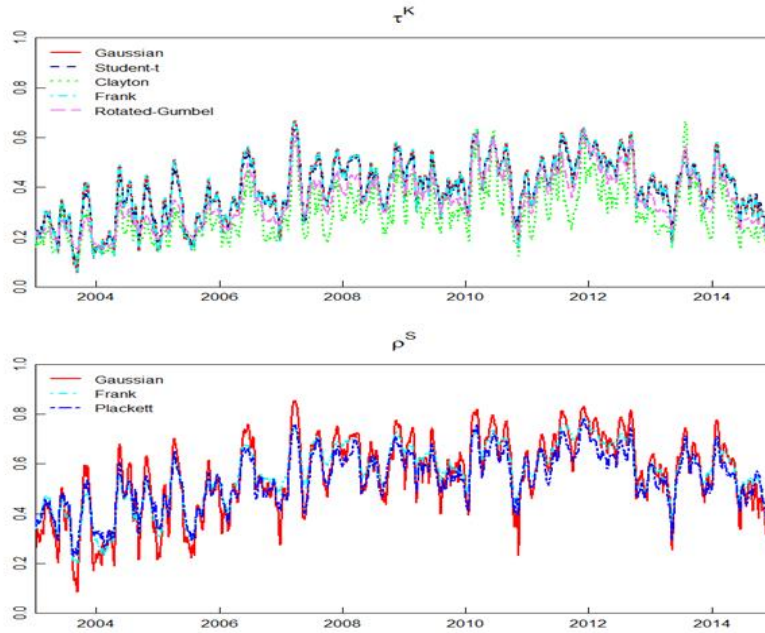
[표 5.4]의 7행에 수록된 Chib and Zeliakov (2001)의 방법으로 추정된 로그주변우도를 이용하여 각 모형들을 비교할 수 있다. Chib and Zeliakov (2001)의 방법으로 로그주변우도를 추정하기 위해서는 첫 번째 파라미터 블록을 제외한 나머지 파라미터들의 블록에 대한 추가적인 축약사후표본추출(reduced posterior sampling)이 필요하다. 본 연구에서는 5만개의 축약사후표본추출에서 5개마다 하나씩 표본을 취하여 축약사후표본을 생성하였다. 그리고 파라미터 블록은  $\nu, \phi, \sigma_{\eta}^2, \mu$ 로 설정하였다.  $\nu$ 와  $\phi$ 의 사후표본추출에만 MH알고리즘을 이용하므로, 이와 같이 파라미터 블록을 설정하는 것이 파라미터들의 사후확률 밀도함수의 값을 추정하는데 편리하다. 모형들을 비교하는 로그베이즈팩터는 로그주변우도의 차이이다. [표 5.7]의 로그주변우도를 기준으로 모형들을 비교하면,  $t$ 코플러, 가우시언코플러, Plackett코플러, 회전Gumbel코플러, Frank코플러, Clayton코플러의 순으로 모형들이 선택됨을 알 수 있다. Kass and Raftery

(1995)의 기준으로 판단하면, 이들 모형들의 차이가 가장 작은 약 2.52의 가우시언코플러와  $t$ 코플러를 비교하는 베이스팩터조차도  $t$ 코플러모형이 선택되는 약한 증거를 보여주고 있다. [그림 5.4]에는 각 모형들의 연관성 파라미터 사후표본을 이용하여 구한  $\tau^K$ 와  $\rho^S$ 의 순위상관계수들의 사후평균을 도시하였다. [그림 5.3]에서 상단과 하단 패널은 각각 확률코플러모형의  $\rho^K$ 와  $\rho^S$ 의 사후평균을 도시한 것이다. 그림에서 실선은 가우시언코플러, 쇠선은  $t$ 코플러, 점선은 Clayton코플러, 일점쇠선은 Frank코플러, 긴쇠선은 회전Gumbel코플러, 그리고 일점긴쇠선은 Plackett코플러의 순위상관계수를 나타낸다. [그림 5.4]의 순위상관계수의 사후평균들은 Clayton코플러모형으로 추정된  $\rho^K$ 를 제외하고 매우 유사한 값을 가지는 것으로 나타나고 있다. 따라서 통계적인 기준뿐만 아니라 경제적인 기준을 이용하여 모형들을 비교하는 것이 필요하다.

[표 5.5]와 [그림 5.5]는 각각 고전적 접근법에서의 확률코플러모형들을 비교하는 식 (3.29)의 Rivers and Vuong 검정과 식 (3.30)의 Johannes et al. (2009) 순차우도비에 로그를 취한 로그순차우도비를 도시한 것이다. 15개의 모든 쌍들을 비교하는 것이 가능하지만, [표 5.4]의 로그우도와 주변로그우도비의 크기에 의해 모형들이 선택되는 순서로 인접한 모형들을 서로 비교하였다. [표 5.5]에서 ()안의 수치는 p값을 나타낸다. 그리고 [그림 5.4]에서 실선은  $\log(LR_{Student,Gaussian})$ , 쇠선은  $\log(LR_{Gaussian,Plackett})$ , 점선은  $\log(LR_{Plackett,Rotated-Gumbel})$ , 일점쇠선은  $\log(LR_{Rotated-Gumbel, Frank})$ , 그리고 일점긴쇠선은  $\log(LR_{Frank,Clayton})$ 을 나타낸다. [표 5.5]에서 {가우시언코플러,  $t$ 코플러}, {Plackett코플러, 회전Gumbel코플러}, {회전Gumbel코플러, Frank코플러}의 쌍에 대한 Rivers and Vuong (2002) 검정은 유의하지 않은 것으로 나타나고 있다. [그림 5.5]의 순차로그우도비에서,  $\log(LR_{Frank,clayton})$ 는 Frank코플러모형이 Clayton코플러모형에 비해 모든 기간에 걸쳐 전반적으로 우수함을 보여주는 반면,  $\log(LR_{Gaussian,Plackett})$

은 2007년 이후의 가우시언코플러모형이 Clayton모형에 비해 우수함을 보여 주고 있다.

[그림 5.4] 확률코플러모형들의 순위상관계수 사후평균



주) 그림에서 상단과 하단 패널은 각각 확률코플러모형의  $\rho^K$ 와  $\rho^S$ 의 사후평균을 도시한 것이다. 그림에서 실선은 가우시언코플러, 쇠선은 t코플러, 점선은 Clayton 코플러, 일점쇄선은 Frank코플러, 긴쇄선은 회전Gumbel코플러, 그리고 일점긴쇄선은 Plackett코플러의 순위상관계수를 나타낸다.

본 장에서는 지리적, 정치적, 그리고 경제적으로 연관성이 강해지고 있는 한국과 중국 경제의 연관성을 고려하여 KOSPI지수와 HSCE지수 수익률 일간 자료에 대한 확률코플러모형을 분석하였다. 본 실증분석은 본 연구의 MCMC 알고리즘으로 확률코플러모형들을 추정하는 것이 가능하다는 것을 보여주는 예이다. 확률코플러모형의 경우 모형진단 또한 모형비교 만큼 중요하다. 본 연구는 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘과 모형비교에 초점을

[표 5.5] 고전적 접근법의 확률코플러모형 비교

비교모형	Rivers and Vuong(2002) 검정통계량
$\overline{\ln L}_{Student-t} - \overline{\ln L}_{Gaussian}$	1.2895 (0.1973)
$\overline{\ln L}_{Gaussian} - \overline{\ln L}_{Plackett}$	2.8382 (0.0046)
$\overline{\ln L}_{Plackett} - \overline{\ln L}_{RotatedGumbel}$	0.2516 (0.8014)
$\overline{\ln L}_{RotatedGumbel} - \overline{\ln L}_{Frank}$	0.8316 (0.4057)
$\overline{\ln L}_{Frank} - \overline{\ln L}_{Clayton}$	2.7641 (0.0057)

주) ()안의 수치는 p값을 나타낸다.

두고 있으므로 확률코플러모형 진단에 대한 논의를 의도적으로 생략하였다.

고전적 접근법의 확률코플러모형 진단에 대한 보다 자세한 논의는 Manner and Reznikov (2012)에서 논의되고 있다. Hafner and Manner (2012)는 확률코플러모형에 대한 EIS-SML추정에서 얻어지는 미관측 상태변수인 연관성 파라미터의 EIS추정치를 이용하여 확률코플러모형을 진단하는 방법을 논의하였다. 그러나 연관성 파라미터의 EIS추정치는 상태공간모형의 상태변수에 대한 평활추정치이므로 이를 이용한 모형 진단은 엄밀성이 다소 결여된 것으로 볼 수 있다. Manner and Reznikov (2012), Hafner and Manner (2012)에서 논의된 고전적 접근법에서의 모형 진단은 파티클필터로 추정된 연관성 파라미터의 예측추정치를 이용하는 것이 보다 바람직하다. Patton (2013)은 일반적인 조건부코플러모형에 대한 진단 방법에 대한 서베이에서 진단통계량의 분포를 얻기 위해 부트스트랩(bootstrap)을 이용하는 진단법들을 제시하고 있다. 베이시언 추론을 한 경우, 이러한 고전적인 접근법에서의 모형진단 방법을 이용하

[그림 5.5] 확률코플러모형들의 순차로그우도비(sequential log-likelihood ratio)



주) 그림은 확률코플러모형들을 비교하는 순차로그우도비를 도시한 것이다. 실선은  $\log(LR_{Student,Gaussian})$ , 쇠선은  $\log(LR_{Gaussian,Plackett})$ , 점선은  $\log(LR_{Plackett,Rotated-Gumbel})$ , 일점쇄선은  $\log(LR_{Rotated-Gumbel, Frank})$ , 그리고 일점긴쇄선은  $\log(LR_{Frank,Clayton})$ 을 나타낸다.

기에는 계산상의 부담이 지나치게 크기 때문에 실질적으로 이용하기 어렵다. 저자들의 지식범위에서 베이지언 접근법의 확률코플러모형 진단 방법은 현재 까지 제시되지 않았으므로 현재로서는 일반적인 상태공간모형 진단 방법들을 이용할 수 있다.

본 연구는 2변량 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론에 초점을 두고 있다. Aas et al. (2009)는 Bedford and Cooke (2002)의 줄기코플러모형을 이용하여 다변량 코플러모형을 구성하는 방법을 제시하였다. 본 연구에서 다룬 2변량 확률코플러모형을 Aas et al. (2009)의 다변량 코플러모형으로 확장할 수



있을 것이다. 베이지언 접근법에서 2변량 확률코플러모형을 다변량모형으로 확장하는 방법에 대한 연구는 향후의 후속 연구주제로 남겨두기로 한다.

## 6. 결론

본 연구는 연관성 파라미터를 미관측 상태변수로 가지는 확률코플러모형에 대한 베이지언 MCMC알고리즘을 제안하고, 시뮬레이션을 통해 본 연구에서 제안한 알고리즘의 성과를 제시하였다. 본 연구의 베이지언 추론 알고리즘은 기존 연구에서 제시된 알고리즘보다 일반적인 확률코플러모형을 추정할 수 있는 알고리즘이다. 자산가격 수익률의 전형적인 특성을 포착하는 확률변동성모형과 함께 확률코플러모형은 자산가격 수익률들의 비대칭·비선형 꼬리 연관성의 전형적인 특성을 포착할 수 있는 모형이다. 최근 코플러모형을 이용한 리스크관리와 파생상품 가격결정에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다 (Cherubini et al. (2012)). 기존의 확률변동성모형에 대한 연구와 함께 본 연구에서 제안한 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론 알고리즘은 재무·금융 분야의 응용에 기여할 수 있을 것으로 생각된다.

본 연구의 알고리즘을 이용한 실증분석으로 KOSPI지수와 HSCE지수 수익률 일간자료에 대한 확률변동성모형과 확률코플러모형을 분석하였다. 가우시언코플러,  $t$ 코플러, Clayton코플러, Frank코플러, 회전Gumbel코플러, Plackett코플러의 확률코플러모형에 대한 베이지언 추정과 모형비교 결과,  $t$ 코플러모형이 가장 좋은 모형으로 선택되었다. 이러한 실증분석 결과는 연관성 파라미터가 시변하는 타원분포 확률코플러모형이 파라미터가 고정된 확률코플러모형이 포착하는 비대칭·비선형 꼬리 연관성을 설명할 수 있다는 Hafner and Manner (2012)의 주장에 부합한다. 그러나 6개의 코플러모형 중에서  $t$ 코플러모형이 가장 좋은 모형으로 선택되는 결과는 가우시언 확률코플러모형이

‘near asymptotic dependence’를 설명할 수 있음에도 불구하고 가우시언 확률코플러모형이 포착할 수 없는 극단적인 꼬리 연관성이 남아 있을 수 있음을 의미한다.

본 연구는 2변량 확률코플러모형에 대한 베이지언 추론과 모형비교에 초점을 두고 있다. 베이지언 접근법에서는 개별 모형의 절대적인 적합성 검정이 쉽지 않다. 고전적인 접근법에서도 확률코플러모형 진단 방법은 쉽지 않다. 기존 고전적 접근법의 연구에서는 조건부코플러분포함수의 일양성(uniformity)을 검정하는 고전적 검정 통계량의 임계값을 구하기 위해 부트스트랩을 이용하는 방법들이 제시되었다. 이러한 진단 방법을 확률코플러모형으로 확장하는 것은 지나치게 계산상의 부담이 크기 때문에 현실적으로 이용하기 어렵다. 현재로서는 일반적인 상태공간모형 진단 방법들을 확률코플러모형에 준용할 수 있다. 고전적 접근법에서든 베이지언 접근법에서든 확률코플러모형 진단 방법에 대한 연구가 필요하다. 그리고 본 연구에서 다룬 2변량확률코플러모형을 다변량확률코플러모형으로 확장하는 방법에 대한 연구도 필요할 것이다.

## References

- Aas, K., C. Czado, A. Frigessi, and H. Bakken (2009), "Pair-copula constructions of multiple dependence," *Insurance: Mathematics and Economics* 44, 182-198.
- Abramowitz, M. and I.A. Stegun (1970), *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover Publications.
- Almeida, C. and C. Czado (2012), "Efficient Bayesian inference for stochastic time-varying copula models," *Computational Statistics and Data Analysis* 56, 1511-1527.
- Andrews, D.W.K. (1991), "Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation," *Econometrica* 59, 817-858.
- Ang, A. and G. Bekaert (2002), "International asset allocation with regime shifts," *Review of Financial Studies* 15, 1137-1187.
- Ang, A. and J. Chen (2002), "Asymmetric correlations of equity portfolios," *Journal of Financial economics* 63, 443-494.
- Ausin, M.C., and H.F. Lopes (2010), "Time-varying joint distribution through copulas," *Computational Statistics and Data Analysis* 54, 2383-2399.
- Bauwens, L., M. Lubrano (1998). "Bayesian inference on GARCH models using the Gibbs sampler," *Econometrics Journal* 1, C23-C46.

- Bauwens, L. S. Laurent, J.V.K. Rombouts (2006), "Multivariate GARCH models: a survey," *Journal of Applied Econometrics* 21, 79-109.
- Bedford, T. and R. M. Cooke (2002), "Vines-a new graphical model for dependent random variables," *Annals of Statistics* 30, 1031-1068.
- Berg, A., R. Meyer and J. Yu (2004), "Deviance Information Criterion for Comparing Stochastic Volatility Models," *Journal of Business and Economic Statistics* 22, 107-120.
- Cappé, O., S.J. Godsill, and E. Moulines (2007), "An Overview of Existing Methods and Recent Advances In Sequential Monte Carlo," *Proceeding of the IEEE* 95, 899-924.
- Carpenter, J., P. Clifford, and P. Fearnhead (1999), "An improved particle filter for non-linear problems," *IEEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation* 146, 2-7.
- Cherubini, G., E. Luciano, and W. Vecchiato (2004), *Copula methods in Finance*, John Wiley and Sons Ltd.
- Cherubini, G., F. Gobbi, S. Mulinacci and S. Romagnoli (2012), *Dynamic Copula Method in Finance*, Wiley and Sons Ltd.
- Chib, S. and E. Greenberg (1995), "Understanding the Metropolis-Hasting Algorithm," *American Statistician* 49, 327-335.
- Chib, S. and I. Zeliakov (2001), "Marginal Likelihood From the Metropolis Hastings Output," *Journal of American Statistical Association* 96, 270-281.

Chib, S., F. Nardari and N. Shephard (2002), "Markov Chain Monte Carlo Methods for Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics* 108, 281-316.

\_\_\_\_\_ (2006), "Analysis of High Dimensional Multivariate Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics* 134, 341-371.

Chib, S. Y. Omori and M. Asai, (2009), "Multivariate Stochastic Volatility," *Handbook of Financial Time Series*. (eds.) T.G. Andersen, R.A. Davis, J-P. Kreiß, and T. Mikosch, 365-400.

Creal, D. (2009), "A Survey of Sequential Monte Carlo Methods For Economics and Finance," *Econometric Reviews* 31, 245-296.

Creal, D., S.J. Koopman and A. Lucas (2011), "A Dynamic Multivariate Heavy-Tailed Model for Time-Varying Volatilities and Correlations", *Journal of Business and Economic Statistics* 29, 552-563.

\_\_\_\_\_ (2013), "Generalized Autoregressive Score Models with Applications", *Journal of Applied Econometrics* 28, 777-795.

Czado, C., F. Gärtner, F. and A. Min (2011), "Analysis of Australian electricity loads using joint Bayesian inference of d-vines with autoregressive margins," in *Dependence Modeling*," *Handbook on Vine Copulae* (Eds.) Kurowicka, D., and H. Joe, World Scientific Publishing Co.

Doucet, A. and A.M. Johansen (2011), "A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years Later," *The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering* (eds.) Crisan, D. and B. Rozovsky, Oxford University Press, 656-704.

Durbin, J. and S.J. Koopman (1997), "Monte Carlo maximum likelihood estimation of non-Gaussian state space model," *Biometrika* 84, 669-684.

\_\_\_\_\_ (2000), "Time Series Analysis of non-Gaussian observations based on state space models from both classical and Bayesian perspectives," *Journal of Royal Statistical Society Series B* 62, 3-56.

Embrechts, P., A.J. McNeil and D. Straumann (2002), "Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls," *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, (eds.) Dempster, M.A.H., Cambridge University Press. 176-223.

Engle, R. (2002), "Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models," *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 339-350.

Geweke, J. (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," *Bayesian Statistics 4* (eds.) Berger, J.O., J.M. Bernardo, A.P. Dawid, and A.F.M. Smith, 169-194. Oxford, Oxford Univ. Press.

Hafner, C.M. and H. Manner (2012), "Dynamic Stochastic Copula Models: Estimation, Inference and Applications," *Journal of Applied Econometrics* 27, 269-295.

Heinen, A. and R.A. Valdesogo (2009), "Asymmetric CAPM dependence for large dimensions: The canonical vine autoregressive copula model," Technical report, SSRN.

- Hong, Y., J. Tu, and G. Zhou (2007), "Asymmetries in Stock Returns: Statistical Tests and Economic Evaluation," *Review of Financial Studies* 20, 1547-1581.
- Jacquier, E., N.G. Polson and P.E. Rossi (2004), "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models with Leverage Effect and Fat tails," *Journal of Econometrics* 122, 185-212.
- Johannes, M.S., N.G. Polson, and J.R. Stroud (2009), "Optimal Filtering of Jump Diffusions: Extracting Latent States from Asset Prices," *Review of Financial Studies* 22, 2759-2799.
- Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, London, Chapman & Hall/CRC
- \_\_\_\_\_ (2015), *Dependence Modeling with Copulas*, CRC Press.
- Jungbacker, B. and S.J. Koopman (2007), "Monte Carlo estimation for nonlinear non-gaussian state space models," *Biometrika* 94, 827-839.
- \_\_\_\_\_ (2009), "Parameter Estimation and Practical Aspects of Modeling Stochastic Volatility," *Handbook of Financial Time Series*. (eds.) T.G. Andersen, R.A. Davis, J-P. Kreiß, and T. Mikosch, 313-344.
- Kass, R.E. and A. Raftery (1995), "Bayes factors," *Journal of the American Statistical Association* 90, 773-795.
- Kim, S.J., N. Shephard and S. Chib (1998), "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," *Review of Economic Studies* 65, 361-393.

- Ledford A.W, and J.A. Tawn (1996), "Statistics for near independence in multivariate extreme values," *Biometrika* 86, 169-187.
- Lisenfeld, R. and J.F. Richard (2003), "Univariate and multivariate volatility models: Estimation and diagnostics," *Journal of Empirical Finance* 10, 505-531.
- Liu, J.S. and C. Sabatti (2000), "Generalised Gibbs sampler and multigrid Monte Carlo for Bayesian computation," *Biometrika* 87, 353-369.
- Longin, F. and B. Solnik, B (1995), "Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990?" *Journal of International Money and Finance* 14, 3-26.
- Manner, H. and O. Reznikova (2012), "A Survey on the Time-Varying Copulas:: Specification, Simulation, and Application," *Econometric Reviews* 31, 654-687.
- Manner, H. and J. Seger (2011), "Tails of correlation mixtures of elliptical copulas," *Insurance: Mathematics and Economics* 48, 153-160.
- Nelson, R.B. (2006), *An Introduction to Copulas*, New York, Springer.
- Newey, W.K and K.D. West, (1987), "A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix," *Econometrica* 55, 703-708.
- \_\_\_\_\_ (1994), "Automatic lag selection in covariance matrix estimation," *Review of Economic Studies* 61, 631-654.



- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard and J. Nakajima (2007), "Stochastic Volatility with Leverage: Fast and Efficient Likelihood Inference," *Journal of Econometrics* 140, 425-449.
- Patton, A. (2006), "Modelling asymmetric exchange rate dependence," *International Economic Review* 47, 527-556.
- Pelletier, D. (2006), "Regime switching for dynamic correlations," *Journal of Econometrics* 131, 445-473.
- \_\_\_\_\_ (2013), "Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series," in *Handbook of Economic Forecasting, Volume 2* (eds.) Elliott, G. and A. Timmermann, Elsevier, 899-960.
- Pitt, M.K., and N. Shephard, (1999), "Filtering via simulation: auxiliary particle filters," *Journal of the American Statistical Association* 94, 590-599.
- \_\_\_\_\_ (2001), "Auxiliary variable based particle filters," *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Doucet, A., J.F.G. de Freitas, and N.J. Gordon, Springer-Verlag, New York. 271-293
- Richard, J.F. and W. Zhang (2007), "Efficient high-dimensional importance sampling," *Journal of Econometrics* 141, 1385-1411.
- Rivers, D. and Q. Vuong (2002), "Model selection tests for nonlinear dynamic models," *Econometrics Journal* 5, 1-39.
- Rosenblatt, M. (1952), "Remarks on a Multivariate Transformation," *Annals of Mathematical Statistics* 23, 470-472.

- Shephard, N. and M.K. Pitt (1997), "Likelihood analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika* 84, 653-667.
- So, M.K.P. (2003), "Posterior mode estimation for nonlinear and non-Gaussian state space models," *Statistica Sinica* 13, 255-274.
- Spiegelhalter, D.J., N.G. Best, B.P. Carlin, A. van der Linde (2002), "Bayesian measures of model complexity and fit (with discussion)," *Journal of Royal Statistical Society Series B* 64, 583-639.
- Tierney, L. (1994), "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions" (with discussion), *Annals of Statistics*, 82, 1701-1762.
- Tse, Y.K. and A.K.C. Tsui (2002), "A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations," *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 351-362.
- Watanabe, T. (2000), "Bayesian Analysis of Dynamic Bivariate Mixture Models: Can They Explain the behavior of returns and Trading Volume?" *Journal of Business and Economic Statistics*, 18, 199-210.